Liminaire.

Le problème est consacré à l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f *définie sur* $]0, 1[$ *par* $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ *et prolongée convenablement aux extrémités de cet intervalle* $]0, 1[$*, c'est l'objet de la deuxième partie.*

La première partie permet d'établir quelques résultats utiles pour cette étude.
La troisième partie propose enfin un procédé de calcul de l'intégrale de f *sur* $[0, 1]$.

Première partie.

Dans cette partie, on désigne par J l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Soit la fonction v définie sur J par : $v(t) = t + \dfrac{t^2}{2} + \ln(1-t)$.

On se propose, en utilisant un encadrement de la fonction v', de déterminer un encadrement de la fonction w qui associe à t, le nombre $w(t) = t + \ln(1-t)$.

I-1. Expression intégrale de $v(t)$.

I-1-a.

Montrer que v est une fonction dérivable et calculer sa dérivée v'.

I-1-b.

En déduire que, pour tout élément t de J, $v(t)$ peut s'exprimer par :

$$v(t) = \int_0^t \frac{-\lambda^2}{1-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

I-2. Encadrement de v.

I-2-a.

Montrer, en utilisant par exemple le signe de $\dfrac{-\lambda^2}{1-\lambda}$ que, pour tout t de J, $v(t) \leq 0$.

I-2-b.

Montrer que, si λ est un élément de J, alors $-2\,\lambda^2 \leq \dfrac{-\lambda^2}{1-\lambda}$.

En déduire que, pour tout t de J, on a : $-\dfrac{2\,t^3}{3} \leq v(t)$

I-3. Encadrement de w.

Déduire, de ce qui précède, que, si t appartient à J, on a :
$-\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{2\,t^3}{3}\leq t+\ln(1-t)\leq -\dfrac{t^2}{2}$.

Deuxième partie.
Dans cette deuxième partie, on étudie la fonction f définie sur $[0,\,1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x-1}{\ln(x)} \quad \text{si} \quad x\in]0,\,1[\\ f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \end{cases}$$

II-1. Etude de la continuité de f.

II-1-a. Continuité en $x=0$.
Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} f(x)$
Exprimer la propriété de f ainsi démontrée.

II-1-b. Continuité en $x=1$.
Soit la fonction g définie sur $[0,\,1[$ par $g(t)=\ln(1-t)$.

Que représente la limite, lorsque t tend vers **0**, de $\dfrac{g(t)-g(0)}{t}$?

En déduire $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ 0<t}} \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.
Exprimer la propriété de f ainsi démontrée.

II-1-c. Continuité sur $[0,\,1]$.

Montrer que f est continue sur $[0,\,1]$.

II-2. Etude de la dérivabilité de f.

II-2-a. Dérivabilité de f au point $x=0$.
En rappelant le comportement de $x\ln(x)$ lorsque x tend vers **0** par valeurs positives, déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ 0<x}} \dfrac{f(x)}{x}$.
Exprimer la propriété de f ainsi obtenue ainsi que la propriété correspondante pour la représentation graphique de f au point $(0,\,0)$ d'un repère arbitraire donné.

II-2-b. Dérivabilité de f au point $x = 1$.

On pose $x = 1 - t$ lorsque x appartient à $[0, 1[$.

II-2-b-1.

Montrer que $\dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{w(t)}{t \ln(1 - t)}$.

II-2-b-2.

En utilisant un résultat de II-1, trouver les limites, lorsque t tend vers **0**, de $\dfrac{t^2}{t \ln(1 - t)}$ et de $\dfrac{t^3}{t \ln(1 - t)}$.

II-2-b-3.

Déduire de II-2-b-2 et de l'encadrement obtenu dans I-3 que $\dfrac{w(t)}{t \ln(1 - t)}$ admet une limite lorsque t tend vers **0**.
Quelle est cette limite ?

II-2-b-4.

Déduire des questions précédentes que f est dérivable au point $x = 1$.

Donner la valeur de la dérivée à gauche au point $x = 1$ (valeur notée $f'(1)$).

II-2-c.

Montrer que f est dérivable sur $]0, 1]$.

II-3. Variations et représentation graphique.

II-3-a.

Calculer $f'(x)$ pour x élément de $]0, 1[$.

II-3-b.

Calculer la dérivée sur $]0, 1[$ de la fonction $u : x \longmapsto \ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x}$ et, à l'aide de $u(1)$, déterminer le signe de $u(x)$, puis le signe de $f'(x)$.

II-3-c.

Représenter graphiquement la fonction f.

Troisième partie.

On se propose dans cette partie de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ intégrale sur le segment $[0, 1]$ d'une fonction continue.

III-1. Expression de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit g la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$\begin{cases} g(x) &= \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ g(0) &= 0 \end{cases}$$

Cette fonction g étant continue sur $[0, 1[$, admet des primitives.

On désigne par G l'une d'entre elles.
On lui associe la fonction F définie sur $[0, 1[$ par : $F(x) = G(x^2) - G(x)$.

Calculer la dérivée $F'(x)$ pour tout x de $[0, 1[$ et en déduire l'égalité, dans cet intervalle :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(E)}$$

III-1-2. Détermination de la limite de $F(x)$ en $x = 1$.

D'après ce qui précède, $F(x)$ peut s'écrire sous la forme : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]0, 1[$.

III-2-a.

Soit x un nombre réel fixe de $]0, 1[$.

Montrer, pour t élément quelconque de l'intervalle $[x^2, x]$ la double inégalité :

$\frac{x^2}{t} \leq 1 \leq \frac{x}{t}$.

En déduire : $x^2 \int_{x^2}^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq x \int_{x^2}^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

III-2-b.

Calculer l'intégrale $\int_{x^2}^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ et déduire des inégalités; précédentes que :

$\lim\limits_{x \to 1} F(x) = \ln(2)$.

III-3. Calcul de I.
En utilisant notamment l'égalité (E) de la question III-1 et le résultat de III-2, donner la valeur de l'intégrale I.