MASTER MPCE. PROBLEME BLANC DU 4/11/2010
CORRIGE SUCCINT

Exercice 1. Préciser en argumentant la réponse si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
   Rép. Vrai : les valeurs propres $1, 2$ *sont différentes.*
2. La série de Fourier $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+1}$ converge vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π tel que
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad -\pi < x < -\pi/2 \ \text{ ou } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$
   Rép. Faux : la série de Fourier converge uniformément (donc vers une fonction continue) et f *n'est pas continue.*
3. La relation suivante est vraie $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = 2 \int_{-1}^{0} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$
   Rép. Vrai : la fonction à intégrer est paire.
4. Si un nombre réel x est irrationnel alors pour tout entier naturel n le nombre x^n est irrationnel.
   Faux : $x = \sqrt{2}$ *est irrationnel et* $x^2 = 2$.
5. Si $a_n \to 0$ alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n$ converge.
   Rép. Faux : la série harmonique.
6. Le nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments est 30.
   Rép. Faux : c'est $2^5 = 32$.
7. La probabilité d'avoir 2 faces en trois évènements dans une partie de pile ou face (où pile et face sont équiprobables) est 2/3.
   Rép. Faux : c'est $C_3^2/2^3 = 3/8$.
8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est périodique et monotone sur R, alors f est constante.
   Rép. Vrai. Soit T *la période fondamentale,* $0 \le x \le T$ *et supposons par exemple* f *croissante. Alors* $f(0) \le f(x) \le f(T) = f(0)$ *et* $f(x) = f(0)$ *sur un intervalle de période donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *puisque* f *est périodique.*

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n on désigne par p_n, q_n et r_n les parts respectives de marché qu'auront 3 sociétés au bout de n années. On suppose que l'évolution de ces parts est donnée par

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

Au départ, $n = 0$ on a $p_0 + q_0 + r_0 = 1$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$
   Rép. C'est vrai pour $n = 1$. Si on a $V_n = M^n V_0$ alors $V_{n+1} = MV_n = M^{n+1}V_0$ d'où la vérification par récurrence (on a posé $V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$)
2. On pose $B = 4M - 2I$. Montrer $B^2 = 2I + B$.
   Rép. Par le calcul.
3. Monter qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels tels que

   $$M^n = a_n I + b_n B \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$$

   Rép. On a $M = I/2 + B/4$ donc la relation est vérifiée pour $n = 1$. Supposons la vérifiée pour n, alors les relations $M^{n+1} = M(a_n I + b_n B) = (a_n/2)I + (a_n/4 + b_n/2)B + (b_n/4)B^2 = (a_n/2 + b_n/2)I + (a_n/4 + b_n/2 + b_n/4)B = a_{n+1}I + b_{n+1}B$ montrent qu'elle est varie pour $n + 1$, d'où le résultat par récurrence. De plus $a_{n+1} = a_n/2 + b_n/2$ et $b_{n+1} = a_n/4 + 3b_n/4$.
4. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = a_n - b_n$ et $v_n = a_n + 2b_n$.
   Montrer que la suite (u_n) et géométrique et que la suite (v_n) est constante.
   Rép. Calculons
   $u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = a_n/2 + b_n/2 - (a_n/4 + 3b_n/4) = (1/4)(a_n - b_n) = u_n/4$ *et* $u_1 = 1/2 - 1/4 = 1/4$ *(remarquons $u_0 = 1$)*
   $v_{n+1} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = a_n/2 + b_n/2 + a_n/2 + 3b_n/2 = a_n + 2b_n = a_1 + 2b_1 = 1/2 + 1/2 = 1$.

5. En déduire M^n pour n entier naturel.
Rép. De $a_n - b_n = 1/4^n$ *et* $a_n + 2b_n = 1$ *on déduit* $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3 \times 4^n}$ *et* $b_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3 \times 4^n}$ *d'où* $M^n = M^n = a_n I + b_n B = \cdots$
6. Déterminer la limite des termes de la matrice M^n lorsque $n \to +\infty$. Interpréter le résultat pour les sociétés vis à vis de leurs parts de marché.
Rép. Lorsque $n \to +\infty$ $M^n \to I/3 + B/3 = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Egalité des parts.

Problème. Objectif : établir la formule de Stirling qui donne un ordre de grandeur de $n!$ lorsque $n \to +\infty$

Soit (u_n) et $v_n)$ deux suites de nombres réels non nuls. On dit que u_n est équivalent à v_n si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie A : intégrale de Wallis.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx$$

n entier naturel.

1. Calculer I_0, I_1.
Rép. $I_0 = pi/2$, $I_1 = 1$.
2. Justifer que pour tout entier positif $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.
Rép. Il suffit de remarquer que pour $0 \leq x \leq \pi/2$, *on a* $\sin^n x \geq 0$ *et* $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$.
3. Etablir la relation de récurrence (on pourra utiliser une intégration par parties) :
$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$
Rép. intégrons par partie
$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \; dx = \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \; dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x) \; dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$
ce qui est la relation de récurrence demandée.
4. Monter que la suite nI_nI_{n-1} est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
Rép. On a $[(n+1)I_{n+1}]I_n = I_n[nI_{n-1}] = I_1 I_0 = \pi/2$.

5. Monter l'encadrement pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

Rép. De $(n+1)I_{n+1}I_n = nI_nI_{n-1}$ *on déduit, en utilisant la question 2,* $\frac{n}{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$

6. En déduire que I_n, I_{n-1} et $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ sont équivalents lorsque $n \to +\infty$.

Rép. On déduit $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1.$

De $nI_nI_{n-1} = \pi/2$ *on tire* $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_nI_{n-1}}{\pi/2n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n^2}{\pi/2n}$*. Par conséquent* $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$

7. Montrer que pour tout entier n, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

Rép. On a $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}I_{2(n-1)} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}{2n(2n-2)\cdots 2}I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.$

Partie B : formule de Sterling.

On admettra dans la suite que pour tout $x \in]0,1[$ on a l'encadrement :

$$2x + \frac{2x^3}{3} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}$$

On considère la suite (u_n) de terme général

$$u_n = n!\ e^n\ n^{-(n+\frac{1}{2})}$$

1. On pose $p = \frac{1}{2n+1}$. Montrer $\ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(p) - 1$.

Rép. De $p = \frac{1}{2n+1}$ *on déduit* $n = \frac{1-p}{2p}$*. Calculons*

$\ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = -\ln(n+1) - \ln e - (n+1/2)\ln n + (n+3/2)\ln(n+1)$

$\ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = (n+1/2)\ln\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{2p}\ln\frac{1+p}{1-p} - 1.$

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \neq 0$

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2} \leq \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

Rép. La première inégalité vient de :
$4(n+1)(n+2) = 4n^2 + 12n + 8 \geq 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$
Appliquons l'encadrement donné en remplaçant x par p
$$\frac{1}{2p}\left(2p + \frac{2p^3}{3}\right) - 1 \leq \frac{1}{2p}\ln\frac{1+p}{1-p} - 1 \leq \frac{1}{2p}\left(2p + \frac{2p^3}{3(1-p^2)}\right) - 1$$
$$\frac{1}{3(2n+1)^2} = \frac{p^2}{3} \leq \frac{1}{2p}\ln\frac{1+p}{1-p} - 1 \leq \frac{p^2}{3(1-p^2)} = \frac{1}{3(2n+1)^2\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)}$$
ce qui donne après simplification les deux autres inégalités.

3. Montrer que les suites de terme général
$$v_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12(n+1)}$$
sont adjacentes.
On note ℓ leur limite commune lorsque $n \to +\infty$.
Rép. Il est évident que $v_n - w_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Comme $v_{n+1} - v_n = -\ln\dfrac{u_n}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{12n(n+1)}$ la dernière égalité de la question précédente montre que (v_n) est croissante. De même la première égalité montre que (w_n) est décroissante.

4. Justifier que $n!$ est équivalent à $e^\ell\, e^{-n}\, n^{(n+\frac{1}{2})}$ lorsque $n \to +\infty$.
Rép. De $\ln(u_n) \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$ on déduit $u_n = n!\, e^n\, n^{-(n+\frac{1}{2})} \to e^\ell$ lorsque $n \to +\infty$ et par conséquent $\dfrac{n!}{e^\ell e^{-n} n^{(n+\frac{1}{2})}} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

5. En déduire $e^\ell = \sqrt{2\pi}$ (on utilisera les réponses aux questions 6 et 7 de la partie A).
Rép. D'après 6 partie A, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}} = 1$ et en utilisant 7 partie A
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\pi} n^{1/2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\pi} n^{1/2} \frac{e^\ell e^{-2n} (2n)^{(2n+\frac{1}{2})}}{(2^n e^\ell e^{-n} n^{(n+\frac{1}{2})})^2}$$
Ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^\ell e^{-2n} 2^{(2n+\frac{1}{2})} n^{(2n+1)}}{2^{2n} e^{2\ell} e^{-2n} n^{(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{e^\ell}$ d'où le résultat.