MASTER MPCE. PROBLEME BLANC DU 4/11/2010

Durée 4h. Pas de document ou calculatrice

Exercice 1. Préciser en argumentant la réponse si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. La série de Fourier $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+1}$ converge vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π tel que
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad -\pi < x < -\pi/2 \ \text{ ou } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$
3. La relation suivante est vraie $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = 2\int_{-1}^{0} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$
4. Si un nombre réel x est irrationnel alors pour tout entier naturel n le nombre x^n est irrationnel.
5. Si $a_n \to 0$ alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n$ converge.
6. Le nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments est 30.
7. La probabilité d'avoir 2 faces en trois évènements dans une partie de pile ou face (où pile et face sont équiprobables) est 2/3.
8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est périodique et monotone sur R, alors f est constante.

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n on désigne par p_n, q_n et r_n les parts respectives de marché qu'auront 3 sociétés au bout de n années. On suppose que l'évolution de ces parts est donnée par

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

Au départ, $n = 0$ on a $p_0 + q_0 + r_0 = 1$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$
2. On pose $B = 4M - 2I$. Montrer $B^2 = 2I + B$.
3. Monter qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels tels que
$$M^n = a_n I + b_n B \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$$
4. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = a_n - b_n$ et $v_n = a_n + 2b_n$. Montrer que la suite (u_n) et géométrique et que la suite (v_n) est constante.
5. En déduire M^n pour n entier naturel.
6. Déterminer la limite des termes de la matrice M^n lorsque $n \to +\infty$. Interpréter le résultat pour les sociétés vis à vis de leurs parts de marché.

Problème. Objectif : établir la formule de Stirling qui donne un ordre de grandeur de $n!$ lorsque $n \to +\infty$

Soit (u_n) et $v_n)$ deux suites de nombres réels non nuls. On dit que u_n est équivalent à v_n si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie A : intégrale de Wallis.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx$$

n entier naturel.

1. Calculer I_0, I_1.
2. Justifer que pour tout entier positif $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.
3. Etablir la relation de récurrence (on pourra utiliser une intégration par parties) :
$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$
4. Monter que la suite nI_nI_{n-1} est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
5. Monter l'encadrement pour tout entier naturel n non nul :
$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$
6. En déduire que I_n, I_{n-1} et $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ sont équivalents lorsque $n \to +\infty$

7. Montrer que pour tout entier n, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}\dfrac{\pi}{2}$.

Partie B : formule de Sterling.

On admettra dans la suite que pour tout $x \in]0,1[$ on a l'encadrement :

$$2x + \frac{2x^3}{3} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}$$

On considère la suite (u_n) de terme général

$$u_n = n!\ e^n\ n^{-(n+\frac{1}{2})}$$

1. On pose $p = \dfrac{1}{2n+1}$. Montrer $\ln \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = f(p) - 1$.
2. En déduire que pour tout entier naturel $n \neq 0$

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2} \leq \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)}$$

3. Montrer que les suites de terme général

$$v_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12(n+1)}$$

   sont adjacentes.
   On note ℓ leur limite commune lorsque $n \to +\infty$.
4. Justifier que $n!$ est équivalent à $e^{\ell}\ e^{-n}\ n^{(n+\frac{1}{2})}$ lorsque $n \to +\infty$.
5. En déduire $e^{\ell} = \sqrt{2\pi}$ (on utilisera les réponses aux questions 6 et 7 de la partie A).