`Durée 4 heures : pas de documents, calculatrice, téléphone`
`les logarithmes sont tous népériens !`

Exercice 1.

Soit $z_0 = e^{2i\pi/5} = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$. *On pose* $\alpha = z_0 + z_0^4$ *et* $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

(1) (a) *Montrer que* $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.
  (b) *Montrer que* α *et* β *sont solutions de l'équation :* $X^2 + X - 1 = 0$.
  (c) *Exprimer* α *en fonction de* $\cos(2\pi/5)$.
  (d) *En déduire la valeur de* $\cos(2\pi/5)$.

(2) *On désigne par* A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *les points d'affixe respectives* $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$ *dans le plan affine rapporté au repère orthonormé* $O, \vec{u}, \vec{v})$. *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* Ω *d'affixe* $-1/2$ *passant par* B *d'affixe* i, *ce cercle coupe l'axe* $(O, \vec{u})$ *en les points* M *et* N, M *désignant celui d'abscisse positive.*
  (a) *Soit* H *le point d'intersection de la droite* A_1A_4 *avec l'axe* $(O, \vec{u})$, *montrer que* $\overline{OH} = \cos(2\pi/5)$.
  (b) *Montrer que* $\overline{OM} = \alpha$ *et* $\overline{ON} = \beta$.
  (c) *Montrer que* H *est le milieu de* OM.
  (d) *En déduire une construction simple (à la règle et au compas) d'un pentagone régulier dont on connait le centre* O *et un sommet* A_0.

Exercice 2. *Calculer d'au moins trois manières différentes le développement limité à l'ordre* 3 *à l'origine de la fonction tangente*

Exercice 3. *Soient* $0 < a < b$, *on pose (rappel :* $a^x := \exp(x\log(a)\ldots)$ *) :*

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right).$$

(1) *Quel est le domaine de définition de* f *?*
(2) *Donner le développement limité à l'origine et à l'ordre 2 de* a^x.
(3) *Quel est le développement limité à l'origine et à l'ordre 2 de* $u \mapsto \log(1+u)$ *?*
(4) *Montrer qu'au voisinage de l'origine on a* $\log f(x) = \log(\sqrt{ab}) + \dfrac{x}{8}\log^2\left(\dfrac{a}{b}\right) + o(x)$.
(5) *En déduire que* f *se prolonge continuement à l'origine.*
(6) *Dorénavant* f *est ainsi prolongée. Montrer qu'elle admet à l'origine le développement limité à l'ordre* 1 *suivant* $f(x) = \sqrt{ab} + x\dfrac{\sqrt{ab}}{8}\log^2\left(\dfrac{a}{b}\right) + o(x)$.
(7) f *est-elle dérivable à l'origine ?*
(8) *Montrer que* $f(x) = b\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\right)^{1/x}$.
(9) *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.
(10) *Montrer que* $f(x)f(-x) = ab$.
(11) *Que vaut* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *?*
(12) *On admet (le temps nous manque...) que* f *est croissante sur* $\mathbb{R}$, *représenter graphiquement* f *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(1) *Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres complexes de module 1 vérifiant* $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |1+z|$ *? le représenter graphiquement.*

(2) *Soit $\mathscr{X}$ l'ensemble des racines de l'équation* $z^{2010}-1=0$ *; on choisit au hasard (les tirages sont équiprobables) une racine* $u \in \mathscr{X}$. *Quelle est la probabilité que* $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |1+u|$ *?*

Exercice 5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$, *on pose pour tout* $0 \leq k \leq n-1$: $\varepsilon^k = e^{2ik\pi/n}$ *; dans la suite* P_k *désignera le point d'affixe* ε^k *dans le plan affine rapporté au repère orthonormé* $O, \vec{u}, \vec{v})$. *On considère enfin le polynôme* $Q(X) = X^n - 1$.

(1) *Montrer que* $P(X) = \frac{Q(X)}{X-1} = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

(2) *Factoriser* P.

(3) *Montrer que* $n = (-1)^{n-1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{2ik\pi/n} - 1\right)$.

(4) *Soient* $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ *les sommets d'un polygone régulier à* n *cotés inscrit dans le cercle unité. Montrer que* $\overline{S_0S_1} \cdot \overline{S_0S_2} \dots \overline{S_0S_{n-1}} = n$.

(5) *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$A_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

(a) *Montrer que* $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-ik\pi/n}}{2i}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right)$.

(b) *En « déduire » que* $A_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

Corrigé du second Problème blanc :

Solution de l'exercice 1 :

(1) Soit $z_0 = e^{2i\pi/5} = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$, on pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

- (a) Classiquement puisque $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ et comme z_0 est une racine cinquième de l'unité distincte de 1 on a : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.
- (b) $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ implique que $\alpha + \beta = -1$, et $\alpha\beta = (z_0 + z_0^4)(z_0^2 + z_0^3) = z_0^3(1 + z_0^3)(1 + z_0) = z_0^3(1 + z_0 + z_0^3 + z_0^4) = -z_0^5 = -1$. Donc ce sont les racines de $X^2 + X - 1 = 0$.
- (c) Comme $|z_0| = 1 = z_0^5 = z_0 z_0^4$ il en résulte que $\overline{z_0} = z_0^4$ soit $\alpha = z_0 + \overline{z_0} = 2\mathrm{re}(z_0) = 2\cos(2\pi/5)$.
- (d) Les racines de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, un seul de ces deux réels est positif comme $2\cos(2\pi/5)$, c'est $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, c'est donc α et vu la question précédente : $2\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ soit $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(2) On peut remarquer que les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1 et forment un pentagone régulier convexe dont un des sommets A_0 est le point d'intersection du cercle avec l'axe O_x.

- (a) La définition du cosinus donne $\overline{OH} = \cos(2\pi/5)$.
- (b) Vu les choix du cercle, les abscisses des points M et N sont les solutions de l'équation $(x + \frac{1}{2})^2 = \Omega B^2$ soit $x^2 + x - 1 = 0$ soit vu les signes $\overline{OM} = \alpha$ et $\overline{ON} = \beta$. Enfin, d'après la question précédente $\overline{OH} = \cos(2\pi/5) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OM}}{2}$.
- (c) $OA_0 = 1$, on trace le cercle de centre O et de rayon 1, on construit les points Ω et B puis on trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω passant par B : il permet de localise le point M intersection de la droite OA_0 avec $\mathscr{C}$; on construit alors le milieu H de OM et la perpendiculaire à (OA_0) en H rencontre le cercle unité en les points A_1 et A_4. Enfin le point A_2 sera à l'intersection du cercle unité avec le cercle de centre A_1 et de rayon A_1A_0 et on fait de même pour A_3 à partir de A_2 ou A_4.

Solution de l'exercice 2 : La fonction $f(x) = \tan(x)$ est indéfiniement dérivable à l'origine, elle y admet donc un développement limité à tout ordre (c'est Taylor-Young). En outre f est impaire et ses développements limités en 0 ne comporteront que des termes des degré impair.

• $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ donc $f''(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$ et $f'''(x) = 2(1 + \tan^2(x)) + 6(1 + \tan^2(x))\tan^2(x)$; par conséquent $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f'''(0) = 2$ donc le développement limité à l'ordre 3 de f est $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

• $\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)$ et on va multiplier des développements limités de ces deux fonction pour obtenir celui de tangente : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ soit $\frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \cdot (1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = x + x^3(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

• Pour une troisième solution on peut par exemple procéder comme suit : le développement limité à l'ordre 4 de f est de la forme $f(x) = ax + bx^3 + o(x^4)$ donc le développement limité à l'ordre 3 de f' est de la forme $f'(x) = a + 3bx^2 + o(x^3)$ et comme nous avons $f'(x) = 1 + f^2(x)$ on tire $a + 3bx^2 + o(x^3) = 1 + (ax + bx^3 + o(x^4))^2 = 1 + a^2x^2 + o(x^3)$ soit $a = 1$ et $a^2 = 1 = 3b$ i.e. $b = 1/3$ et $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

• On pourrai aussi chercher un $DL_{4,0}$ d'une primitive de f : $\log(cos(x))$; ou bien encore chercher un $DL_{0,2}$ de $f'(x) = 1/\cos^2(x)$ et l'intégrer (le choix de la constante est imposé par $f(0) = 1$).

Solution de l'exercice 3 :

(1) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

(2) $a^x = \exp(x\log(a)) = 1 + x\log(a) + \log^2(a)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

(3) $\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

(4) On remplace a^x et b^x par leur développement limité à l'ordre 2 obtenu plus haut : $\log f(x) = \dfrac{1}{x}\log\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right) = \dfrac{1}{x}\log\left(1 + \frac{x}{2}\log(ab) + (\log^2(a) - \log^2(b))\frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)$. Ce qui se trouve dans le log est bien du type $1 + u$ àù u tends vers zéro : on peut donc composer le développement limité, on trouve après regroupement des termes et simplification par x : $f(x) = \sqrt{ab} + x\dfrac{\sqrt{ab}}{8}\log^2\left(\dfrac{a}{b}\right) + o(x)$.

(5) On déduit de ce qui précède que $\lim_{x\to 0}\log f(x) = \log(\sqrt{ab})$ soit $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{ab}$: on peut donc prolonger continuement f à l'origine en posant $f(0) = \sqrt{ab}$.

(6) Il suffit de combiner les deux questions précédentes.

(7) f est dérivable à l'origine car elle y admet un développement limité à l'ordre 1 (attention ! ce n'est vrai que jusqu'à l'ordre 1 : posséder un $DL_{2,0}$ n'implique pas être deux fois dérivable à l'origine ... on en parlera lors de la correction) et $f'(0) = \frac{\sqrt{ab}}{8}\log^2(a/b)$.

(8) C'est clair $f(x) = b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)^{1/x}$.

(9) Avec la formule précédente – et comme on vérifie facilement que $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)^{1/x}$ tends vers 1 lorsque x tends vers l'infini – on a bien : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

(10) On vérifie sans peine que $f(x)f(-x) = ab$.

(11) Comme f tends vers b en $+\infty$ donc vu la question précédente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Solution de l'exercice 4 :

(1) Si z est de module 1, on l'écrit $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ donc $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |1+z|$ équivaut à $2+\sqrt{3} \leq |1+u|^2 = (1+\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$ soit $\cos(\theta) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\mathscr{E}$ est donc l'arc $\{e^{i\theta},\ \theta \in [-\pi/6, \pi/6]\}$.

(2) Le tirage étant équiprobable, il nous faut dénombrer les racines 2011-ièmes de l'unité $e^{2ik\pi/2011}$, $(0 \leq k \leq 2011)$ qui sont dans $\mathscr{E}$. Comme $0 \leq \frac{2k\pi}{2011} \leq \frac{\pi}{6}$ équivaut à $0 \leq k \leq \frac{2010}{12} = 167.5$. Les racines étant disposées symétriquement de part et d'autre de l'axe O_x nous avons $167 + 167 + 1 = 335$ racines dans $\mathscr{E}$ (ne pas oublier 1 !). La probabilité demandée est donc $\frac{335}{2010} \sim 0.1666...$

Solution de l'exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose pour tout $0 \leq k \leq n-1$: $\varepsilon^k = e^{2ik\pi/n}$; dans la suite P_k désignera le point d'affixe ε^k dans le plan affine rapporté au repère orthonormé $O, \vec{u}, \vec{v}$). On considère enfin le polynôme $Q(X) = X^n - 1$.

(1) C'est la formule classique $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$.

(2) Comme $X^n - 1 = (X-1)(X-\varepsilon)(X-\varepsilon^2)\dots(X-\varepsilon^{n-1})$ nous avons $P(X) = (X-\varepsilon)(X-\varepsilon^2)\dots(X-\varepsilon^{n-1})$.

(3) Avec la question précédente $n = P(1) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n}) = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right)$.

(4) $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle unité donc modulo une rotation on peut supposer que $S_0 = 1, S_1 = \varepsilon, \dots A_{n-1} = \varepsilon^{n-1}$. Alors $\prod_{k=1}^{n-1}\overline{S_0S_k} = \prod_{k=1}^{n-1}|\varepsilon^k - 1| = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right) = n$ vu la question précédente.

(5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$A_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

(a) Il suffit dans la formule définissant A_n d'écrire les sinus sous la forme $\sin(x) = \frac{e^{-ix}}{2i}(e^{2ix} - 1)$.

(b) Alors

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-ik\pi/n}}{2i}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right) = \frac{e^{-i(1+2+\cdots+n-1)\pi/n}}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right) = \frac{e^{-i(n-1)\pi/2}}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right)$$

$$= \frac{(-i)^{n-1}}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$