Vos réponses RÉDIGÉES doivent être envoyées par mail à :
marie-helene.lecureux@toulouse.iufm.fr

MASTER MPCE
entraînement de mathématiques : devoir 1

<u>Conseil de travail :</u> Il est très important pour préparer le concours de prendre soin de la rédaction qui doit être la plus claire possible

Exercice 1

Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :

   - A_1 l'évènement "la personne est absente lors du premier appel " ;
   - R_1 l'évènement "la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ".

   Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :

   A_2 l'évènement "la personne est absente lors du second appel" ;

   R_2 l'évènement "la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel" ;

   R l'évènement "la personne accepte de répondre au questionnaire".

   Calculer la probabilité de R.

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire?

Exercice 2

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ [par

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\ ;\ +\infty[$ une unique solution notée α.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

   On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

   (a) Tracer la courbe (Γ), et de façon géométrique, à partir de la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la fonction f et tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

2. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$, $F(x) = -x\mathrm{e}^{1-x} + 1$.

   (c) Démontrer que sur $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

3. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathcal{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

   Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_a$, soit égale à $\dfrac{1}{2}$ et hachurer $\mathcal{D}_a$ sur le graphique.

Exercice 3

On note $\mathbb{C}$ les corps des nombres complexes. On désigne par P le plan complexe muni d'un repère orthonormal dont les extrémités des vecteurs de base ont pour affixe respectivement 1 et i, donc $M \in P$ de coordonnées (x, y) a pour affixe $z = x + iy$.

Questions préparatoires.

1. On considère la droite de P d'équation $ax + by + c = 0$ où $ab \neq 0$. Vérifier que le vecteur (a, b) est orthogonal à cette droite. On note $u = a + ib \in \mathbb{C}$. Montrer que l'affixe z d'un point de cette droite vérifie l'équation $u\bar{z} + \bar{u}z + \gamma = 0$. Déterminer γ.

2. Montrer que l'affixe z du point d'un cercle de centre d'affixe ω vérifie :
   $z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \rho = 0$, où $|\omega|^2 - \rho \geq 0$.
   Quel est le rayon de ce cercle ?

Quelques transformations.

Etant donné un transformation $F : P \to P$, on désigne par $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui à l'affixe z du point $M \in P$ associe l'affixe $z' = f(z)$ du point $M' = F(M)$.

1. Montrer que $f(z) = \lambda z + b$, où $\lambda \in R^*$, représente une transformation F qui est une translation si $\lambda = 1$ et une homothétie de rapport λ si $\lambda \neq 1$. Déterminer le centre de cette homothétie.

2. Monter que $f(z) = az + c$ où $a \in \mathbb{C}^*$ est une rotation. Déterminer l'angle de la rotation et le centre

3. Montrer qu'une homothétie ou une translation transforme un droite en une droite parallèle.

4. Montrer qu'une rotation transforme une droite en une droite, et un cercle en un cercle de même rayon.

5. On considère la transformation représentée par $g(z) = \dfrac{1}{z}$ pour $z \neq 0$. Monter que cette transformation transforme une droite ne passant pas par l'origine en un cercle. Montrer qu'elle transforme un cercle ne passant pas par 0 en un cercle.

   Que se passe-t-il lorsque la droite ou le cercle passe par l'origine?