Université Paul Sabatier. (16-12-2010) Master MEI
☯ ☢ ☯ MEIS7M2 – EXAMEN FINAL . ☯ ☢ ☯

Durée trois heures, pas de documents, téléphone, calculatrices.
Le barême est approximatif. L'exercice 1 « Histoire des Mathématiques » est à rédiger sur une copie séparée.

Exercice 1 (**Histoire des mathématiques**). ***(3 points)***
Voici un extrait du début de la note Henri Lebesgue aux CRAS du 29 avril 1901 :

> *« Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolu par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives »*

(1) *Expliquer quel est le problème que se propose de résoudre Lebesgue avec sa nouvelle théorie de l'intégrale ? Citer deux autres questions qui ont joué un rôle important dans l'évolution du calcul intégral.*
(2) *Rappeler comment Riemann intègre une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$. Donner la date et le titre de la thèse d'habilitation de Riemann dans laquelle il présente sa théorie de l'intégrale.*
(3) *Comment Lebesgue propose-t-il d'intégrer ? Quel est l'avantage selon Lebesgue de sa théorie de l'intégrale ?*

Exercice 2. ***(9 points)*** *Soient* $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t),\ g(t) = \sqrt{t}e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$

(1) *Montrer* ***soigneusement*** *que f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$.*
(2) *f admet-elle une transformée de Fourier ? et g ?*
(3) *Montrer que $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?*
(4) *Montrer que $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\mathscr{F}f)'(x) = -2i\pi \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}e^{-2i\pi xt}dt$.*
(5) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\mathscr{F}f)'(x) = -\dfrac{i\pi + 2\pi^2 x}{1 + 4\pi^2 x^2}(\mathscr{F}f)(x)$.*
(6) *En « déduire » qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*
$$(\mathscr{F}f)(x) = C(1 + 4\pi^2 x^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{-i arctan(2\pi x)}{2}\right).$$
(7) *Calculer C (rappel : l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$).*
(8) *$(\mathscr{F}f)$ admet-elle une transformée de Fourier ?*
(9) *Justifier l'existence de $\mathscr{F}(fg)$ puis la calculer.*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3. ***(3 points)***

(1) *Montrer* ***soigneusement*** *que* $L^1(\mathbb{R})$ *et* $L^2(\mathbb{R})$ *ne sont pas comparables pour l'inclusion.*

(2) *Montrer que* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4. ***(5 points)*** *On pose* $f(t) = e^{-\pi t^2}$ *et on se propose dans cet exercice de déterminer la transformée de Fourier* $\mathscr{F}f$ *de* f *d'une manière différente de celle vue en cours.*

(1) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ *on a* $a_n = \dfrac{(2\pi|x|)^{2n}}{(2n)!} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^{2n} dt = \dfrac{\pi^n |x|^{2n}}{n!}$.

(2) *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n$ *?*

(3) *Déterminer* $\mathscr{F}f(x)$.

Fin de l'épreuve.

Université Paul Sabatier, 15 décembre 2010 Master MEI

☯ ☢ ☯ MEIS7M2 – CORRIGE. ☯ ☢ ☯

Exercice 5.

(1) *Expliquer quel est le problème que se propose de résoudre Lebesgue avec sa nouvelle théorie de l'intégrale ? Citer deux autres questions qui ont joué un rôle important dans l'évolution du calcul intégral.*

Lebesgue se propose de résoudre le problème des fonctions primitives, c'est-à-dire de trouver une fonction connaissant sa dérivée. Il existe en effet des fonctions dérivées qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann.

La mesure des aires, la cinématique et enfin les séries de Fourier ont joué un rôle important dans l'évolution du calcul intégral.

(2) *Rappeler comment Riemann intègre une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$. Donner la date et le titre de la thèse d'habilitation de Riemann dans laquelle il présente sa théorie de l'intégrale.*

Riemann découpe l'intervalle $[a, b]$ où varie x *et considère les sommes* $\sum y_i(x_{i+1} - x_i)$, *où* y_i *désigne une valeur prise sur l'intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$. *Si ces sommes tendent vers une limite quand on raffine le découpage, cette limite est l'intégrale au sens de Riemann.*

Riemann publie sa théorie de l'intégrale en 1854 dans sa thèse d'habilitation à l'université de Goettingen Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.

(3) *Comment Lebesgue propose-t-il d'intégrer ? Quel est l'avantage selon Lebesgue de sa théorie de l'intégrale ?*

Lebesgue propose de découper l'intervalle où varie y, *et il associe à chaque intervalle* $[y_j, y_{j+1}]$ *de ce découpage la mesure de l'ensemble des* x *tels que* $y_j \leqslant f(x) \leqslant y_{j+1}$. *Si cette mesure est* m_j, *une valeur approchée de l'intégrale sera* $\sum m_j y_j$. *Si ces sommes tendent vers une limite quand on raffine le découpage, cette limite est l'intégrale au sens de Lebesgue.*

Le procédé de Lebesgue, à la différence de celui de Riemann, peut tenir compte des propriétés particulières de la fonction à laquelle il s'applique.

Exercice 6. *Soient* $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) g(t) = \sqrt{t}e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

(1) *Montrer* ***soigneusement*** *que* f *et* g *sont dans* $L^1(\mathbb{R})$.

g est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable, nulle sur $\mathbb{R}_-$, le seul point douteux est en $+\infty$ où $\lim_\infty t^2|g(t)| = 0$: qui assure classiquement que $g \in L^1(\mathbb{R})$. f présente elle un problème en 0_+ et en $+\infty$, en 0_+ elle est intégrable puisqu'équivalent à $1/\sqrt{t}$ et elle l'est en $+\infty$ pour les mêmes raisons que g puisque $\lim_\infty t^2|f(t)| = 0$: $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) *f admet-elle une transformée de Fourier ? et g ?*

f et g admettent toutes les deux des transformées de Fourier puisque $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

(3) *Montrer que $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?*

Oui puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, c 'est le cours !

(4) *Montrer que* $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *et que pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $(\mathscr{F} f)'(x) = -2i\pi \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}e^{-2i\pi xt}dt$.

Nous avons $(\mathscr{F} f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,t)dt$ *où* $\varphi(x,t) = f(t)e^{-2i\pi xt}$ *; vu (1) et comme* $x \mapsto \varphi(x,t)$ *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^\star$ *et que* $|\partial_x \varphi(x,t)| \leq 2\pi g(t) \in L^1(\mathbb{R}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *le théorème de dérivation des intégrales à paramétres assure que* $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *et que l'on peut dériver sous l'intégrale i.e. : pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $(\mathscr{F} f)'(x) = -2i\pi \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}e^{-2i\pi xt}dt$.

(5) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $(\mathscr{F} f)'(x) = -\dfrac{i\pi + 2\pi^2 x}{1+4\pi^2x^2}(\mathscr{F} f)(x)$.

Il faut être un peu délicat, soit $x \in \mathbb{R}$, *avec (4) et une intégration par parties, nous avons :*

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F} f)'(x) &= -2i\pi \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}e^{-2i\pi xt}dt = -2i\pi \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t(1+2i\pi x)}dt \\
&= -2i\pi \left[-\sqrt{t} \cdot \frac{e^{-t(1+2i\pi x)}}{1+2i\pi x} \right]_0^\infty - 2i\pi \int_0^\infty \frac{e^{-t(1+2i\pi x)}}{1+2i\pi x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\
&= -\frac{i\pi}{1+2i\pi x}(\mathscr{F} f)(x) = -\frac{i\pi(1-2i\pi x)}{1+4\pi^2x^2}(\mathscr{F} f)(x) = -\frac{i\pi + 2\pi^2 x}{1+4\pi^2x^2}(\mathscr{F} f)(x).
\end{aligned}$$

où le terme entre crochets s'annule en $+\infty$ *puisque* $\left| -\sqrt{t} \cdot \frac{e^{-t(1+2i\pi x)}}{1+2i\pi x} \right| = \sqrt{t}\frac{e^{-t}}{|1+2i\pi x|} \to 0\dots$

(6) *Montrer qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$(\mathscr{F} f)(x) = C(1+4\pi^2x^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{-i \arctan\,(2\pi x)}{2} \right).$$

Avec la question précédente nous avons :

$$\frac{(\mathscr{F} f)'(x)}{(\mathscr{F} f)(x)} = -\frac{i\pi}{1+4\pi^2x^2} - \frac{2\pi^2 x}{1+4\pi^2x^2} = \left(-\frac{i}{2} \cdot \arctan(2\pi x) - \frac{1}{4}\log(1+4\pi^2x^2) \right)'$$

soit

$$(\mathscr{F} f)(x) = C(1+4\pi^2x^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{-i \arctan(2\pi x)}{2} \right).$$

Observez bien que le module de l'exponentielle vaut 1 et donc $(\mathscr{F} f)(x)$ *tends bien vers zéro en* $\pm\infty$.

(7) *Calculer* C *(rappel : l'intégrale de Gauss* $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$*).*

$C = (\mathscr{F} f)(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^\infty e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}$, *donc*

$$(\mathscr{F} f)(x) = \sqrt{\pi}(1+4\pi^2x^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{-i \arctan(2\pi x)}{2} \right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(8) $(\mathscr{F} f)$ *admet-elle une transformée de Fourier ?*

Certainement pas car elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$, *en effet on vérifie sans peine qu'il existe* $C > 0$ *tel que* $|(\mathscr{F} f)(x)| \underset{\infty}{\sim} Cx^{-1/4}$ *et* $1/4 < 1\dots$

(9) *Justifier l'existence de* $\mathscr{F}(fg)$ *puis la calculer.*

$fg(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \in L^1(\mathbb{R})$, *donc* $\mathscr{F}(fg)$ *est bien définie et*

$$\mathscr{F}(fg)(x) = \int_0^\infty e^{-t}e^{-2i\pi xt}dt = \int_0^\infty e^{-t(1+2i\pi x)}dt = \frac{1}{1+2i\pi x}.$$

Exercice 7.

(1) *Montrer **soigneusement** que $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables pour l'inclusion.*

La fonction $f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ de l'exercice 1 appartient à $L^1(\mathbb{R})$ mais certainement par à $L^2(\mathbb{R})$ puisque f^2 est équivalente en 0_+ à $1/t$ qui est notoirement non intégrable à l'origine. Donc $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$. Réciproquement $t \mapsto \frac{1}{1+|t|} \not\in L^1(\mathbb{R})$ puisque équivalente à $1/t$ en $+\infty$ mais par contre elle est dans $L^2(\mathbb{R})$ (puisque cette fois-ci équivalente en $\pm\infty$ à $1/t^2$.

(2) *Montrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.*

L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ (c'est le cours) et clairement inclu dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; par transitivité de la densité le résultat suit.

Exercice 8. *On pose $f(t) = e^{-\pi t^2}$ et on se propose dans cet exercice de déterminer la transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ de f d'une manière différente de celle vue en cours, on.*

(1) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ calculer $a_n = \dfrac{(2\pi|x|)^{2n}}{(2n)!}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^{2n} dt = \dfrac{\pi^n |x|^{2n}}{n!}$.*

Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^{2n} dt = \int_{\mathbb{R}} t e^{-\pi t^2} t^{2n-1} dt = \left[\frac{e^{-\pi t^2}}{-2\pi} t^{2n-1}\right]_0^\infty + \frac{2n-1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^{2(n-1)} dt$$
$$= \frac{2n-1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^{2(n-1)} dt = \frac{2n-1}{2\pi} b_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{(2\pi)^n} b_0$$
$$= \frac{(2n)!}{(2\pi)^n n! 2^n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt = \frac{(2n)!}{(4\pi)^n n!}.$$

on en déduit la formule demandée.

(2) *Quelle est la nature de la série $\sum_n a_n$?*

Le rayon de convergence du développement en série entière de $z \mapsto e^z$ étant infini la série de terme général $\frac{\pi^n |x|^{2n}}{n!}$ converge et a pour somme $\sum_n a_n = e^{\pi^2 |x|}$.

(3) *Déterminer $\mathscr{F} f(x)$.*

On peut écrire en développant la seconde exponentielle en série entière :

$$\mathscr{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t x} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x t)^n}{n!} dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt$$

où $f_n(t) = e^{-\pi t^2}\frac{(-2i\pi x t)^n}{n!}$. D'aprés le cours, la condition suffisante pour justifier l'échange $\int\sum = \sum\int$ est la convergence de la série de terme général $c_n = \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)| dt$. Par imparité $c_n = 0$ si n est impair et $c_{2n} = a_n$ i.e. $\sum_n c_n = \sum_n a_n$ et la série converge d'aprés la question précédente. Par conséquent l'échange $\int\sum = \sum\int$ est justifié et on peut écrire (par imparité les termes impairs disparaissent) :

$$\mathscr{F}(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^n dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x)^{2n}}{(2n)!}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\pi^n x^{2n}}{n!} = e^{-\pi x^2} = f(x).$$

Et on retrouve bien la formule canonique $\mathscr{F}(f)(x) = f(x)$.