Université Paul Sabatier. (juin 2011) Master MEI
MEIS7M2 – EXAMEN FINAL (seconde session).

Durée trois heures, pas de documents, téléphone, calculatrices.
Le barème est approximatif. L'exercice 1 « Histoire des Mathématiques » est à rédiger sur une copie séparée.

Exercice 1 (**Histoire des mathématiques**). *(4 points)*

Exercice 2. ***(10 points)*** *On considère les applications*

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x} dt, \quad g(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1} dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

La convergence pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, de ces intégrales impropres est connue, il est donc inutile de la redémontrer.

(1) *Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

(2) (a) *Soit $x \geq 0$. Montrer que $f(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2} dt$.*

(b) *En « déduire » que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f''(x) = \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4} dt$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

(c) *Montrer que $f''(x) = \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^2} dt = \frac{1}{x} - f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.*

(3) *Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.*

(4) *En « déduire » que $f - g$ est 2π-périodique.*

(5) *Montrer que $f(x) = \frac{1}{x} + o(1/x)$.*

(6) *Montrer que f et g sont équivalentes à $\frac{1}{x}$ en $+\infty$*

(7) *Montrer que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis, sur $\mathbb{R}_+$.*

(8) *En déduire enfin que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.*

Exercice 3. ***(8 points)***

(1) *Montrer **soigneusement** que $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables pour l'inclusion.*

(2) *Montrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.*

(3) *On se propose de démontrer que pour tout $1 \leq p \leq 2$: $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$. Pour cela si $f \in L^p(\mathbb{R})$ on pose $E = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| > 1 \} = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)|^p > 1 \}$. Enfin q désignera le conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) *Montrer que E est mesurable et est de mesure de Lebesgue finie.*

(b) *En déduire que $f \cdot \mathbf{1}_E \in L^1(\mathbb{R})$.*

(c) *Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t) \cdot \mathbf{1}_E(t)| dt \leq \|f\|_p \cdot \lambda(E)^{1/q}$.*

(d) *Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E}(t)|^2 dt \leq \|f\|_p^p$.*

(e) *Conclure.*

Fin de l'épreuve.

Exercice 4 (1)**.**

(1) *Montrer* ***soigneusement*** *que* $L^1(\mathbb{R})$ *et* $L^2(\mathbb{R})$ *ne sont pas comparables pour l'inclusion.*

(2) *Montrer que* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R})$.

(3) *On se propose de démontrer que pour tout* $1 \leq p \leq 2$: $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$. *Pour cela si* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *on pose* $E = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| > 1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)|^p > 1 \,\}$. *Enfin* q *désignera le conjugué de* p *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) *Montrer que* E *est mesurable et est de mesure de Lebesgue finie.*

(b) *En déduire que* $f \cdot \mathbf{1}_E \in L^1(\mathbb{R})$.

(c) *Montrer que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t) \cdot \mathbf{1}_E(t)| dt \leq \|f\|_p \cdot \lambda(E)^{1/q}$.

(d) *Montrer que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E}(t)|^2 dt \leq \|f\|_p^p$.

(e) *Conclure.*

Solution :

(1) La fonction $f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ de l'exercice 1 appartient à $L^1(\mathbb{R})$ mais certainement par à $L^2(\mathbb{R})$ puisque f^2 est équivalente en 0_+ à $1/t$ qui est notoirement non intégrable à l'origine. Donc $L^1(\mathbb{R}) \not\subseteq L^2(\mathbb{R})$. Réciproquement $t \mapsto \frac{1}{1+|t|} \not\in L^1(\mathbb{R})$ puisque équivalente à $1/t$ en $+\infty$ mais par contre elle est dans $L^2(\mathbb{R})$ (puisque cette fois-ci équivalente en $\pm\infty$ à $1/t^2$.

(2) L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ (c'est le cours) et clairement inclu dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; par transitivité de la densité le résultat suit.

(3) (a) C'est clair puisque $E = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ où f est mesurable car dans $L^1(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\lambda(E) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(t) dt = \int_E dt \leq \int_E |f(t)|^p dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_p^p < +\infty.$$

(b) $\lambda(E) < +\infty$ assure que $\mathbf{1}_E \in L^r(\mathbb{R})$ pour tout $r \geq 1$, en particulier $\mathbf{1}_E \in L^q(\mathbb{R})$ et comme $f \in L^p(\mathbb{R})$ la première partie de l'inégalité de Hölder assure que $f \cdot \mathbf{1}_E \in L^1(\mathbb{R})$.

(c) La seconde partie de l'inégalité de Hölder assure que

$$\|f \cdot \mathbf{1}_E\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|\mathbf{1}_E\ \|_q = \|f\|_p \cdot \lambda(E)^{1/q}.$$

(d) Vu la définition de E : $|f(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E}(t)| \leq 1$; et comme $0 \leq v \leq 1$ et $1 \leq p \leq 2$ impliquent $u^p \leq u^2$ on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E}(t)|^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E}(t)|^p dt \leq \|f\|_p^p < +\infty.$$

(e) On vient de démontrer que pour tout $p \in [1, 2]$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$ on a la décomposition : $f = f \cdot \mathbf{1}_E + f \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E} \in L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ puisque $f \cdot \mathbf{1}_E \in L^1(\mathbb{R})$, $f \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus E} \in L^2(\mathbb{R})$; i.e. $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, 2]$.

Exercice 5 (2). *On considère les applications*

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt, \quad g(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt.$$

(1) *Montrer que les intégrales impropres* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ *et* $\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ *convergent.*

(2) *Montrer que* g *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(3) (a) *Soit* $x > 0$. *Montrer que* $f(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt$.

(b) *En « déduire » que* f *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *avec* $f''(x) = \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) *Montrer que* $f''(x) = \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^2}dt = \frac{1}{x} - f(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(4) *Montrer que* f *et* g *sont solutions de l'équation différentielle* $y'' + y = \frac{1}{x}$.

(5) *En « déduire » que* $f - g$ *est* 2π*-périodique.*

(6) *Montrer que* $f(x) = \frac{1}{x} + o(1/x)$ *et* g *sont équivalentes à* $\frac{1}{x}$ *en* $+\infty$ *puis que* $f = g$.

(7) *Montrer que* f *et* g *sont équivalentes à* $\frac{1}{x}$ *en* $+\infty$

(8) *Montrer que* $f = g$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *puis sur* $\mathbb{R}_+$.

(9) *En déduire que* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Solution :

(1) (1) et (2) Ces intégrales impropres sont clairement convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; posons pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$: $f(x,t) = \sin(xt)/t + x, g(x,t) = e^{-tx}/t^2 + 1$.

• Les dominations

$$|g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+), \forall t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}_+$$
$$\left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right| \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \forall x \geq a > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+$$
$$\left|\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}\right| \leq \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \forall x \geq a > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

assurent par convergence dominée que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec

$$g'(x) = -\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{t^2+1}dt, \quad g''(x) = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{t^2+1}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

On en déduit immédiatement que $g''(x) + g(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

• Pour f c'est plus délicat car l'application $t \mapsto f(x,t)$ est notoirement non absolument intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et toute domination est donc veine. On commence donc par une intégration par parties pour obtenir une expression plus exploitable de f. Pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t+x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt$$

(afin d'alléger les calculs on a choisi $1-\cos(t)$ comme primitive de $\sin(t)$ choix qui annule le « terme entre crochets »). De là, si $h(x,t) = 1-\cos(t)/(t+x)^2$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |h(x,t)| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right| = \left|-\frac{2(1-\cos(t))}{(t+x)^3}\right| \leq \frac{4}{(t+a)^3} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \forall x \geq a > 0,$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}\right| = \left|\frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}\right| \leq \frac{12}{(t+a)^3} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \forall x \geq a > 0,$$

ces dominations impliquent que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ avec

$$f''(x) = \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Enfin par une intégration par parties

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^\infty \frac{6(1-\cos(t))}{(t+x)^4}dt = \left[-\frac{2(1-\cos(t))}{(t+x)^3}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt \\ &= \left[-\frac{\sin(t)}{(t+x)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}dt = \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t+x)^2}dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{(t+x)^2} - \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}dt = \frac{1}{x} - f(x), \quad x>0. \end{aligned}$$

On en déduit bien que $f''(x)+f(x)=1/x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(2) • f et g sont solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation $y''+y=1/x$, $f-g$ est donc solution de l'équation $y''+y=0$: c'est la restriction à $\mathbb{R}_+^\star$ d'une solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=0$ donc 2π-périodique.

(3) Soit $x>0$, vu ce qui précède

$$f(x) = \frac{1}{x} - \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt$$

et comme

$$\left|\int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{(t+x)^3}dt\right| \le \int_0^\infty \frac{2dt}{(t+x)^3} = \frac{2}{x^2} = o(x^{-1})$$

i.e.

$$f(x) = \frac{1}{x} + o(x^{-1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Pour g, on procède de même encore plus simplement.

• Sur $\mathbb{R}_+^\star$, $f-g$ est continue 2π-périodique et tends vers 0 en $+\infty$: elle est donc identiquement nulle et on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2+1}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(4) Comme f et g sont continues à l'origine et comme $g(0)=\pi/2$ nous avons

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

C.Q.F.D. ■

Remarque : Dans certaines solutions, une majoration plus grossière assure seulement la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^\star$. Dans ce cas, il reste alors dans le raisonnement ci-dessus à montrer que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

Soit $a>0$, écrivons

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+a}dt - \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt\right| \le \int_0^1 \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt + \int_1^\infty \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt$$

le premier terme du second membre tend vers zéro avec a par convergence dominée car l'intégrande converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ avec la domination

$$\frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)} \le \frac{|\sin(t)|}{t} \in L^1([0,1]).$$

Pour le second terme, l'affaire est encore plus simple puisque

$$\int_1^\infty \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt \le a\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \to_{a\to 0} 0.$$

• On peut aussi, sans convergence dominée écrire pour tout $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+a}dt - \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt\right| &\le \int_0^\varepsilon \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt + \int_\varepsilon^\infty \frac{a|\sin(t)|}{t(t+a)}dt \\ &\le \int_0^\varepsilon \frac{\sin(t)}{t}dt + \int_\varepsilon^\infty \frac{a}{t^2}dt \\ &\le \varepsilon + \frac{a}{\varepsilon} \qquad \forall\, a,\varepsilon>0 \\ &\le 2\sqrt{a} \qquad \forall\, a>0 \text{ (on a fait } \varepsilon=\sqrt{a}) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 6 (3)**.** *λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

(1) *Montrer que l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est une partie dense, mesurable, d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle.*

(2) *Soit $\varepsilon > 0$, construire un ouvert $\mathscr{U}_\varepsilon$ de $\mathbb{R}$ qui soit dense dans $\mathbb{R}$ et de mesure de Lebesgue $\lambda(\mathscr{U}_\varepsilon) < \varepsilon$ (rappel : $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\varepsilon = \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\varepsilon\ldots$).*

(3) *Soient $0 < r < 1$, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ une famille dénombrable dense dans $[0,1]$ (par exemple $\mathbb{Q} \cap [0,1]$), et $(r_i)_i$ une suite de réels strictement positifs de somme $\sum_{i\geq 1} r_i = r/2$. On pose*

$$K := [0,1] \setminus \bigcup_{i\geq 1}]a_i - r_i, a_i + r_i[.$$

Montrer que K est un compact de $[0,1]$, d'intérieur vide mais de mesure de Lebesgue $\lambda(K) > 0$.

(4) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si U est borné, montrer que $\lambda(U)$ est finie. La réciproque est-elle vraie ? (considérez par exemple $\mathscr{O} = \bigcup_{n\geq 0}]n - 2^{-n+1}, n + 2^{-n-1}[$).*

(5) *Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Si A contient un ouvert non vide, montrer que $\lambda(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?*

Solution :

(1) • Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x_n = 10^{-n}E(10^n x)$ est le nombre décimal qui coïncide avec x jusqu'à la n-ième décimale, donc $|x - x_n| \leq 10^{-n}$, donc $\lim_n x_n = x$ et $\mathbb{Q}$ est bien dense dans $\mathbb{R}$.

• C'est le cours car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, les singletons sont mesurables et toute reunion d'ensemble mesurables est mesurable. Ou bien soit $\mathbb{Q} = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une énumeration de $\mathbb{Q}$ et posons $A_n = \{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$. Les ensembles A_n forment une suite croissante d'ensemble mesurables donc $\mathbb{Q} = \cup_n A_n$ est mesurable (classes monotones).

• Tout ouvert non vide dans $\mathbb{R}$ contient un intervalle ouvert et donc rencontre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est donc vide.

• Par σ-additivité : $\lambda(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(\{r_n\}) = 0$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\mathbb{Q} = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une énumeration de $\mathbb{Q}$. Alors

$$\mathscr{U}_\varepsilon := \bigcup_{n\geq 0}]r_n - \varepsilon 2^{-n-2}, r_n + \varepsilon 2^{-n-2}[.$$

est ouvert comme réunion dénombrable d'ouverts et (toujours par σ-additivité) de mesure

$$\lambda(\mathscr{U}_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(]r_n - \varepsilon 2^{-n-2}, r_n + \varepsilon 2^{-n-2}[) = \sum_{n\geq 0} 2\varepsilon 2^{-n-2} = \varepsilon.$$

Il répond bien à la question.

(3) K est borné car inclus dans $[0,1]$ borné. K est fermé car c'est le complémentaire d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans le fermé $[0,1]$. K est donc fermé borné dans $\mathbb{R}$, c'est bien un compact. L'intérieur de K est vide car $[0,1] \setminus K$ est un ouvert dense (dense car il contient la partie dense $\{a_1, a_2, \ldots\}$). Enfin $\lambda(K) = 1 - \lambda([0,1] \setminus K)$ et, par σ-additivité

$$\lambda([0,1] \setminus K) \leq \sum_{i\geq 1} \lambda(]a_i - r_i, a_i + r_i[) = \sum_{i\geq 1} 2r_i = r.$$

D'où $\lambda(K) \geq 1 - r > 0$. C.Q.F.D.

(4) Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Il existe alors $a > 0$ tel que $U \subset [-a, a]$ et par suite $\lambda(A) \leq 2a < +\infty$. La réciproque est fausse : considérer par exemple l'ouvert non borné (il contient $\mathbb{N}$)

$$\mathscr{O} = \bigcup_{n\geq 0}]n - 2^{-n+1}, n + 2^{-n-1}[$$

qui est de mesure $\sum_n 2^{-n} = 2 < \infty$.

(5) Si A partie mesurable de $\mathbb{R}$ contient un ouvert non vide, alors il existe deux réels $a < b$ tels que $]a, b[\subset A$. Par conséquent $\lambda(A) \geq b - a > 0$. La réciproque est fausse comme le montre le compact de la question (3). ■