Université Paul Sabatier **Juin 2011**

☯ L2 PCP, Préparation à l'oral ☯

☯ ☢ ☯

1. Algébre Linéaire : Généralités

Exercice 1. *Déterminer la boule (euclidienne) de* $\mathbb{R}^3$ *passant par les quatres points* $A_1 = (1,0,0), A_2 = (1,1,0), A_3 = (1,1,1), A_4 = (0,1,1)$. *(Indic : écrire les équations que devraient vérifier ces points et se ramener à la résolution d'un système linéaire).*

Exercice 2. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang 1, montrer que* $\det(A + I_n) = trace(A) + 1$.

Exercice 3. *Soient* E_1, E_2 *deux sous-espaces de* $\mathbb{R}^{10}$ *vérifiant* $E_1 \subset E_2, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 6$. *Déterminer la dimension du sous espace* $\mathscr{E}$ *de* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ *définit par*

$$\mathscr{E} = \left\{ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10}) \ : \ T(E_1) \subset E_1 \ \& \ T(E_2) \subset E_2 \right\}.$$

(Indic : observer l'allure des matrices des éléments de $\mathscr{E}$ *écrites dans une base convenablement choisie de* $\mathbb{R}^{10}$*).*

Exercice 4. *Calculer les déterminants :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}, \quad \det(A_n) = \det((a_{ij} = |i-j|))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Exercice 5. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *On désignera par* $\widehat{A}$ *la matrice obtenue à partir de* A *en remplacant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *la* i*-ième colonne de* A *par la sommes des autres colonnes. On désigne par* $\widetilde{A}$ *la matrice déduite de* A *en retranchant pour tout* $1 \leq i \leq n$ *à la* i*-ième colonne de* A *la sommes des colonnes d'indices distincts de* i. *Exprimer en fonction de* $\det(A)$ *les déterminants* $\det(\widehat{A})$ *et* $\det(\widetilde{A})$

Exercice 6. *Soit* n *un entier impair et* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice vérifiant* $A^2 = O_n$ *ou* $A^2 = I_n$. *Montrer que* $\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n)$.

Exercice 7. *Soient* $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathbb{C}[X] \setminus \{O\}$ *et* $B \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* n. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X])$ *qui à* $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X])$ *associe* $\varphi(P)$ *le reste de la division Euclidienne de* AP *par* B.

(1) *Montrer que* φ *est bien dans* $\mathscr{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X])$.
(2) *Déterminer* $\ker(\varphi)$.
(3) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur la paire* A, B *pour que* $\varphi \in GL_n(\mathscr{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X]))$.

2. Algébre Linéaire : Réduction

Exercice 8. *(ccp, 2010) Soit* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A \neq O$ *et* $A^3 + A = O$.

(1) *A est-elle diagonalisable dans* $\mathbb{C}$ *? dans* $\mathbb{R}$ *? et* A^2 *?*
(2) *Montrer que* A *est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. *(ccp, 2010) Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^2 = 2A + 8I_n$.

(1) *Aest-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ? donner l'allure de* $P_A(X)$.

(2) *Déterminer les matrices* $M \in \mathrm{Vect}\{I_n, A\}$ *vérifiant* $M^2 = 2M + 8I_n$.

Exercice 10. *Soient* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *si* $B \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}[A]$ *montrer qu'alors* $B^{-1} \in \mathbb{R}[A]$.

Exercice 11. *Soient* $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ *vérifiant* $AB = BA$ *et* $\det(B) = 1$. *Montrer que* $\det(A^3 + B^3) = 1$ *implique* $A^2 = O_2$.

Exercice 12. *Soit* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^4 = A^2$. *Si* 1 *et* -1 *sont valeurs propres de* A, *montrer que* A *est diagonalisable.*

Exercice 13. *Soit* $A \in GL_6(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ *et* $\mathrm{trace}(A) = 8$. *Quel est le polynôme caractéristique de* A *? montrer que* A *est diagonalisable.*

Exercice 14. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$. *Montrer que* n *est pair, que* A *est diagonalisable et que* $\mathrm{trace}(A) \in -\mathbb{N}$.

Exercice 15. *Résoudre dans* $M_n(\mathbb{R})$ *l'équation* $A^5 = A^3 \quad \text{et} \quad \mathrm{trace}(A) = n$.

Exercice 16. *Soit* $A \in M_2(\mathbb{Z})$. *On suppose qu'il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $A^N = I_2$. *Montrer que* $A^{12} = I_2$.

Exercice 17. *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$ *et* $B^n = 0$. *Montrer que* $\det(A+B) = \det(A)$ *(distinguer successivement les cas* $A = I_n$, A *est inversible puis quelconque).*

Exercice 18. *Soit* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = A^4$ *et* $\mathrm{spec}(A) \supset \{\pm 1\}$. *Montrer que* A *est diagonalisable dans* $M_3(\mathbb{R})$.

3. Algébre bilinéaire

Exercice 19. *Dans l'espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé on considère les deux droites*

$$(\mathscr{D}) \begin{cases} x & = 4z - 1, \\ y & = 2z + 3 \end{cases}, \quad (\mathscr{D}') \begin{cases} x & = -z + 2, \\ y & = 2z - 1. \end{cases}$$

Déterminer un système d'équation cartésiennes définissant la perpendiculaire commune Δ *aux deux droites. En déduire la distance entre ces deux droites.*

Exercice 20. *Soit* $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$. *On se propose de démontrer que* $|\det(A)| \leq n^{n/2}\delta^n$ *où* $\delta := \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$. *Traiter le cas où* $A \notin GL_n(\mathbb{R})$. *On suppose maintenant que* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *et note* C_i *la i-ième colonne de* A : $A = (C_1, \ldots, C_n)$.

(1) *Construire (avec Schmidt) une base orthogonale* $(V_1, \ldots, V_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *vérifiant* $|\det(A)| = |\det(C_1, \ldots, C_n)| = |\det(V_1, \ldots, V_n)| = \|V_1\| \ldots \|V_n\|$.

(2) *Avec Pythagore, montrer que* $\|C_i\|^2 \geq \|V_i\|^2$.

(3) *Conclure.*

Exercice 21. *Soit* $(E, \langle , \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geq 3$, $a, b \in E$ *deux vecteurs non colinéaires et unitaires. On définit* $f \ : \ E \ni x \mapsto f(x) = \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

(1) *Montrer que* f *est un endomorphisme symétrique de* E.

(2) *Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de* f.

Exercice 22. *Déterminer le paramètre réel* λ *pour que les deux droites d'équations*

$$(\mathscr{D}_1) \begin{cases} x + y + z & = 1, \\ x - 2y + 2z & = \lambda \end{cases}, \quad (\mathscr{D}_2) \begin{cases} z - 2x & = 2, \\ y - x & = 1. \end{cases}$$

soient coplanaires et donner alors une équation du plan qui les contient et calculer la distance du point $(1, 1, 1)$ *à ce plan.*

Exercice 23. *Pour* $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *on pose* $\langle A, B\rangle := trace(B\,{}^tC)$. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $trace(AX) = 0$ *pour toute matrice* $X \in M_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle.*

(1) *Montrer que* $(M_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$ *un espace euclidien.*
(2) *Soit* $\mathscr{E} := \{M \in M_n(\mathbb{R})\ \ trace(M) = 0\}$. *Montrer que* $\mathscr{E}$ *est un sous espace vectoriel de* $M_n(\mathbb{R})$, *préciser sa dimension, une base et son orthogonal.*
(3) *Montrer que* $A = \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

4. Intégrales impropres

Exercice 24. *Convergence et convergence absolue de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^3 - t)dt$.

Exercice 25. *Convergence et calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-2011\,(t + 1/t)\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Exercice 26. . $C(\alpha)$ *désignant le coefficient* x^{2011} *dans le DL à l'origine et à un ordre convenable de* $(1+x)^\alpha$ *calculer* $\displaystyle\int_0^1 C(-t-1)\Big(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2}\cdots + \frac{1}{t+2011}\Big)dt$.

Exercice 27. *Soient* $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)g\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$.

Exercice 28. *Déterminer toutes les fonctions continues* $f\ :\ \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ *vérifiant*

$$\exists\, A \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}\ :\quad f(x)f(2x)\dots f(nx) \leq An^N,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 29. *Convergence et convergence absolue de* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ *(pour* $0 < \alpha \leq 1$ *on pourra minorer* $\displaystyle\sum_{k=1}^N \int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}dt$*)..*

Exercice 30. *Préciser la nature des intégrales impropres suivantes :*

$$\int_1^\infty \frac{(\cos(x^{-1}))^x - 1}{x^\alpha}dx,\ \alpha \in \mathbb{R},\quad \int_0^\infty\left(x + 2 - \sqrt{x^2+4x+2}\right)dx,\quad \int_2^\infty \frac{x^{\log(x)}}{\log^x(x)}dx,\quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

5. Suites et Séries

Exercice 31. *(ccp 2010) On désigne par* G_n *la moyenne géométrique des coefficients binomiaux* $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ *i.e.*

$$G_n = \sqrt[n+1]{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}}.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}$ *(Indic : on peut commencer par montrer que* $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} = \prod_{k=1}^n\left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^{n+1-2k}$ *en remarquant que* $\sum_{k=1}^n(n+1-2k) = 0$ *pour reconnaitre dans* $n^{-1}\log(G_n)$ *une somme de Riemann...).*

Exercice 32. *(ccp 2010) Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$, $(n \in \mathbb{N})$. *On pose aussi* $p_n = u_1u_2\dots u_n$.

(1) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on a* $2u_n = \sqrt{2\sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}}$ *(n racines).*

(2) *Montrer que tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on a* $\cos(\pi/2^{n+1}) = 2u_n$.

(3) *En déduite (à l'aide de la formule* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$*) que* $\lim_n p_n = \frac{2}{\pi}$.

Exercice 33. *Existe-t-il* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *deux fois continuement dérivable et telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ *diverge ? (Indic : utiliser la formule de Taylor)*

Exercice 34. *Préciser selon les valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la nature (divergence, convergence, convergence absolue) de la série de terme général* $a_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$. *Chercher un équivalent du module de la suite de terme général* $v_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ *; tends-elle en module vers zéro en décroissant ?*

Exercice 35. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\log n)}{n}$ *diverge. (Indic : estimer la somme sur des blocs ou les cosinus est* $\geq \sqrt{2}2\ldots$*).*

Exercice 36. *Montrer que dans* $\{x \in \mathbb{R} \ : \ \sin^2(x) \leq \frac{1}{2}\}$ *on ne trouvera jamais trois entiers consécutifs. En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$.

Exercice 37. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

(1) *Montrer successivement que* $(a_n)_n$ *est décroissante, convergente de limite nulle.*

(2) *Montrer que pour* $n \geq 2 \ : \ a_n \geq \frac{1-2^{1-n}}{n-1}$. *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n$ *?*

(3) *Montrer que pour* $n \in \mathbb{N} \ : \ a_n = 2^{-n} + 4n(a_n - a_{n+1})$. *Quelle est la nature de la série* $\sum_n a_n/n$ *?*

6. Suites et Séries de fonctions

Exercice 38. (1) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} x^k\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = 4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

(3) *Etudier la suite de fonctions définie sur* $[1,+\infty[$ *par* $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

(4) *Etudier la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}$.

(5) *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$ *:* $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x)$. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$*, la convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*

(6) *Etudier la convergence simple et uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *de la suite de fonctions* $f_n \ : \ x \mapsto x^n e^{-x}/n!$ *et déterminer* $\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$. *Commentaire ?*

Exercice 39. *Pour* $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *on pose* $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}dt$. *Aprés avoir justifié la définition de* a_n*, montrer que la suite* a_n *converge et préciser sa limite.*

Exercice 40. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \int_1^\infty e^{-t^n}dt$. *Après avoir justifié la définition de* a_n*, montrer que la suite* a_n *converge, préciser sa limite et donner un équivalent de* a_n.

Exercice 41. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^\star$ *:* $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{1/n}(1+x/n)^n}$.

(1) *Montrer que l'intégrale impropre* $I_n := \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$ *converge si et seulement si* $n \geq 2$.

(2) *Montrer que pour tout* $x \geq 1$ *et* $n \geq 2$ *:* $|f_n(x)| \leq 4/x^2$.

(3) *Montrer que la suite* $(I_n)_2^\infty$ *converge et préciser sa limite.*

7. Séries de Fourier

Exercice 42. *Montrer que $f(x)=\sin^3(x)$ est développable en série de fourier et préciser ce développement.*

Exercice 43. *Soit $f\in\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ (continue et 2π-périodique...). Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls ; montrer que f est identiquement nulle.*

Exercice 44. *(mines 96) Déterminer toutes les applications $f\in\mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ (de classe C^1 et 2π-périodique) vérifiant $2f(x+1)=f(x)+f(2x),\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$.*

Exercice 45. *(mines 94) Déterminer toutes les applications $f\in\mathscr{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ (de classe C^∞ et 2π-périodique) vérifiant $f(2x)=2\sin(x)f'(x),\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$.*

Exercice 46. *Existe-t'il $f\in\mathscr{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier soit $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$?*

Exercice 47. *Démontrer que $f(x)=\log(2+cos(x)),\ (x\in\mathbb{R})$ est développable en série de Fourier et préciser ce développement.*

Exercice 48. *(mines 2003) Démontrer que $f(x)=Arsin(\sin x)$ est développable en série de Fourier et préciser ce développement.*

Exercice 49. *Utiliser les séries de Fourier pour évaluer l'intégrale*

$$I_n=\int_0^\pi \cos(\cos(x))ch(\sin(x))\cos(nx)dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 50. *(X, 1997) Démontrer que $f(x)=\frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)},\ (x\in\mathbb{R})$ est développable en série de Fourier et préciser ce développement (deux méthodes sont possibles : développer la fraction en une série d'exponentielles $e^{ikx},(k\in\mathbb{Z})$ ou bien trouver une relation de recurrence satisfaite par les coefficients de Fourier réels de f) .*

Exercice 51. *Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f_n(x)=\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est-elle développable en série de Fourier ? Calculer ce développement (indic : éviter le calcul direct des coef.).*

Exercice 52. *Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0,\pi]$.*

1. *Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?*
2. *Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\int_0^x\sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x>0$: $G(x)=\frac{1-\cos(x^2)}{2x}+\int_0^x\frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$. En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty}G(x)$ existe, est finie et strictement positive.*
3. *Soit pour $n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$. à l'aide de la question précédente montrer que $a_n=0(n^{-3/2})$.*
4. *Montrer que f est développable en série de Fourier.*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr