Université Paul Sabatier **Juin 2011**

L2 PCP – Préparation à l'oral : Réduction des endomorphismes.

Exercice 1. *(ccp, 2010) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \neq O$ et $A^3 + A = O$.*

(1) *A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? et A^2 ?*

(2) *Montrer que A est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *(ccp, 2010) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 2A + 8I_n$.*

(1) *Aest-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ? donner l'allure de $P_A(X)$.*

(2) *Déterminer les matrices $M \in Vect\{I_n, A\}$ vérifiant $M^2 = 2M + 8I_n$.*

Exercice 3. *Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $B \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}[A]$ montrer qu'alors $B^{-1} \in \mathbb{R}[A]$.*

Exercice 4. *Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $AB = BA$ et $\det(B) = 1$. Montrer que $\det(A^3 + B^3) = 1$ implique $A^2 = O_2$.*

Exercice 5. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 = A^2$. Si 1 et -1 sont valeurs propres de A, montrer que A est diagonalisable.*

Exercice 6. *Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $trace(A) = 8$. Quel est le polynôme caractéristique de A ? montrer que A est diagonalisable.*

Exercice 7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair, que A est diagonalisable et que $trace(A) \in -\mathbb{N}$.*

Exercice 8. *Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A^5 = A^3$ et $trace(A) = n$.*

Exercice 9. *Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $A^N = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.*

Exercice 10. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $B^n = 0$. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$ (distinguer successivement les cas $A = I_n$, A est inversible puis quelconque).*

Exercice 11. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^4$ et $spec(A) \supset \{\pm 1\}$. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.*

---

24 mai 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

Corrigé

Exercice 12. *(ccp, 2010) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \neq O$ et $A^3 + A = O$.*

(1) *A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? et A^2 ?*

(2) *Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Solution :

(1) • $A^3 + A = O_3$, donc A est annulée par le polynôme $X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$: A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

• Dans $\mathbb{R}$ ce n'est pas possible ; en effet, les valeurs propres possibles de A sont $0, i, -i$ et pour que A soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ il faudrait que 0 soit son unique valeur propre i.e. $A = O_3$ ce qui est exclut. Donc en fait le spectre de A est $0, i, -i$ car la matrice est de taille 3 et A étant réelle si i est valeur propre il en est de même de sa partie imaginaire $-i$. En particulier $X^3 + X$ est au signe près le polynôme caractéristique de A.

• Pour A^2 elle est bien entendu diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisque A l'est : $A = P^{-1}\mathrm{Diag}(i, -i, 0)P$ implique $A^2 = P^{-1}\mathrm{Diag}(-1, -1, 0)P$.

• $A^3 + A = O_3$ implique $(A^3 + A)^2 = A^6 + 2A^4 + A^2 = A^6 - A^2 = 0$. A^2 est donc annulée par le polynôme $X^3 - X = X(X+1)(X-1)$ scindé à racines simples : elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ est son spectre est dans $0, 1, -1$. Observez que (vu le cas complexe) le spectre est en fait $0, -1$ le polynôme minimal $X(X+1)$ et le caractéristique $-X(X+1)^2$.

(2) D'après ce qui précède, $\ker(A)$ est de dimension 1, choisissons e_1 tel que $\ker(A) = \langle e_1 \rangle$. On sait aussi que -1 est valeur propre de A^2, soit donc $e_2 \in \mathbb{R}^3$ non nul vérifiant $A^2 e_2 = -e_2$ et posons $e_3 = -Ae_2$. Nous avons alors $Ae_1 = 0, Ae_2 = -e_3$ et $Ae_3 = -A^2 e_2 = e_2$. Ces trois relations assurent, si la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre, que la matrice de A dans cette base à la forme désirée. Il reste donc à prouver qu'elle est libre : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$ implique en composant par A que $\beta A e_2 + \gamma A e_3 = \beta A e_2 + \gamma e_2 = 0$. Supposons $\beta \neq 0$, alors $Ae_2 = \lambda e_2$ avec $\lambda = -\gamma/\beta \in \mathbb{R}$. e_2 est donc vecteur propre de A associé à une valeur propre réelle. Vu (1) : $\lambda = 0$ donc $\gamma = 0 = \beta$. Il en résulte aussitôt que $\alpha = 0$ et la famille est bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qu'il nous restait à démontrer. ■

Exercice 13. *(ccp, 2010) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 2A + 8I_n$.*

(1) *Aest-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ? donner l'allure de $P_A(X)$.*

(2) *Déterminer les matrices $M \in Vect\{I_n, A\}$ vérifiant $M^2 = 2M + 8I_n$.*

Solution :

(1) A est annulée par $X^2 - 2X - 8 = (X-4)(X+2)$ polynôme scindé à racines simples 4 et -2 : A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et son polynôme caractéristique est $P_A(X) = (-1)^n (X-4)^{n_1}(X+2)^{n_2}$ avec $0 \leq n_1, n_2 \leq n$ et $n_1 + n_2 = n$. Bien entendu, A est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.

(2) Soit $M = \alpha I_n + \beta A \in \mathrm{Vect}\{I_n, A\}$. $M^2 = 2M + 8I_n$ équivaut à $\alpha^2 I_n + 2\alpha\beta A + \beta^2 A^2 = (2\alpha + 8)I_n + 2\beta A$ soit

$$\beta^2 A^2 + A(2\alpha\beta - 2\beta) + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)I_n = 0$$

Le polynôme $\beta^2 X^2 + (2\alpha\beta - 2\beta)X + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)$ annule A : c'est donc un multiple du polynôme minimal de A qui est soit $X - 4$ soit $X + 2$ soit $(X-4)(X+2)$.

$\beta = 0$ implique $\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$ soit $\alpha = 4$ ou $\alpha = -2$, i.e. $M = 4I_n$ ou $-2I_n$.

$\beta \neq 0$ implique $X^2 + 2X(\alpha-1)/\beta + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)/\beta^2 = 0$; la seule alternative est $X^2 + 2X(\alpha-1)/\beta + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)/\beta^2 = X^2 - 2X - 8$. On identifie les coefficients : $\alpha - 1 = -\beta$ et $\alpha^2 - 2\alpha - 8 = -8\beta^2$. En injectant $\beta = 1 - \alpha$ dans la seconde équation, on trouve $\alpha^2 - 2\alpha - 8 = -8(1-\alpha)^2 = -8\alpha^2 + 16\alpha - 8$ soit $9\alpha^2 - 18\alpha = 9\alpha(\alpha - 2) = 0$ soit $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ puis $\beta = 1 - \alpha = 1$ ou $\beta = -1$. On a donc les solutions $4I_n, -2I_n, A, 2I_n - A$. ■

Exercice 14. *Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $B \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}[A]$ montrer qu'alors $B^{-1} \in \mathbb{R}[A]$.*

Solution : Avec Cayley-Hamilton, nous avons $P_B(B) = B^n + b_{n-1}B^{n-1} + \cdots + b_1 B + B_0 I_n = 0$ et comme B est inversible $a_0 = (-1)^n \det(B) \neq 0$ ce qui nous permet d'écrire $\frac{-B}{a_0} \cdot \left(B^{n-1} + b_{n-1}B^{n-2} + \cdots + b_1 I_n\right) = I_n$: la matrice B est donc inversible et $B^{-1} = \frac{-1}{a_0} \cdot \left(B^{n-1} + b_{n-1}B^{n-2} + \cdots + b_1 I_n\right) \in \mathbb{R}[B]$, or, $B \in \mathbb{R}[A]$ donc $B^{-1} \in \mathbb{R}[B] \subset \mathbb{R}[A]$. CQFD . ■

Exercice 15. *Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $AB = BA$ et $\det(B) = 1$. Montrer que $\det(A^3 + B^3) = 1$ implique $A^2 = O_2$.*

Solution : ■

Exercice 16. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 = A^2$. Si 1 et -1 sont valeurs propres de A, montrer que A est diagonalisable.*

Solution : Le polynôme $X^4-X^2=X^2(X-1)(X+1)$ est annulé par A, le spectre de A est donc inclus dans $\{-1,0,1\}$ et vu les hypothèses nous avons donc deux alternatives :
• $\text{spec}(A)=\{-1,0,1\}$ et $P_A(X)=-X(X+1)(X-1)$ est scindé à racines simples : A est diagonalisable.
• 0 n'est pas valeur propre de A : dans ce cas $A\in GL_3(\mathbb{R})$ et alors $A^4=A^2\implies A^2=I_2$. A, annulée par un polynôme scindé à racines simples est encore diagonalisable (ce dernier cas correspond au cas $\text{spec}(A)=\{-1,1\}$ et donc $P_A(X)=(X-1)^2(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. ■

Exercice 17. *Soit $A\in GL_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3-3A^2+2A=0$ et $\text{trace}(A)=8$. Quel est le polynôme caractéristique de A ? montrer que A est diagonalisable.*

Solution : A est annulée par le polynôme $P(X)=X^3-3X^2+2X=X(X-1)(X-2)$, P est scindé à racines simples réelles : A est diagonalisable dans $M_6(\mathbb{R})$ et son spectre inclus dans $\{0,1,2\}$. Comme $A\in GL_6(\mathbb{R})$ le spectre de A est en fait inclus dans $\{1,2\}$. Le polynôme caractéristique de A est donc de la forme $P_A(X)=(X-1)^{n_1}(X-2)^{n_2}$ avec $n_1+n_2=6$. Enfin $\text{trace}(A)=8$ implique $n_1+2n_2=8$. On résoud le système 2×2 et on trouve $n_1=4$ et $n_2=2$ i.e. $P_A(X)=(X-1)^4(X-2)^2$ ■

Exercice 18. *Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4+A^3+2A^2+A+I_n=0$. Montrer que n est pair, que A est diagonalisable et que $\text{trace}(A)\in -\mathbb{N}$.*

Solution : A est annulée par le polynôme $P(X)=X^4+X^3+2X^2+X+1=(X^2+X+1)(X^2+1)=(X-i)(X+i)(X-j)(X-\overline{j})$, P est scindé à racines simples : A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et son spectre inclus dans $\{\pm i, j, j^2\}$. A étant réelles, les multiplicités de i et $-i$ (si i est valeur propre) et de j et j^2 (si j est valeur propre) sont égales, donc le polynôme caractéristique de A est de la forme $P_A(X)=(-1)^n(X-i)^\alpha(X+i)^\alpha(X-j)^\beta(X-j^2)^\beta$ où $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ avec $2\alpha+2\beta=n$. Donc n est déjà pair. Maintenant la trace de A vaut $\beta(j+j^2)=-\beta\in-\mathbb{N}$. ■

Exercice 19. *Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A^5=A^3$ et $\text{trace}(A)=n$.*

Solution : A est annulée par $X^5-X^3=X^3(X^2-1)$ son spectre est donc dans $\{0,1,i,-i\}$. A est à coefficients réels, donc si i est valeur propre de multiplicité n_i, $-i$ sera aussi valeur propre de A avec la même multiplicité. On aura donc $n_0+n_1+n_i+n_{-i}=n_0+n_1+2n_i=n$ (avec $n_\lambda=0$ si $\lambda\in\{0,1,i,-i\}$ n'est pas valeur propre de A). Mais on a aussi $\text{trace}(A)=n=n_1+n_i\text{re}(i)=n_1$ soit $n_0+2n_i=0$ puis $n_0=n_i=0$ soit $\text{spectre}(A)=\{1\}$. A est donc inversible et $A^5-A^3=0$ se réduit à $A^2-I_n=0$ polynôme annulateur scindé à racines simples : A est diagonalisable, l'unique solution est $A=I_n$. ■

Exercice 20. *Soit $A\in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que $A^N=I_2$. Montrer que $A^{12}=I_2$.*

Solution : A est annulée par $P(X)=X^N-1$ scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Ses deux valeurs propres λ_1,λ_2 sont racines de P donc des racines N-ièmes de l'unité. Enfin, A étant à coefficients réels, si elle admet une valeur propre non réelle : les deux seront conjuguées ($\lambda_1=\overline{\lambda_2}$)
⇝ Si les valeurs propres sont réelles $\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,+1\}$ et A étant diagonalisable $A^2=I_2$.
⇝ Sinon, elles sont conjuguées, mais A étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$ implique $\lambda_1+\lambda_2=2\text{re}(\lambda_1)\in\mathbb{Z}\implies 2\text{re}(\lambda_1)\in\{-2,-1,0,1,2\}$.
On en déduit facilement que λ_1 est racine seconde, troisième ou quatrième de l'unité, dans tous les cas $A^{12}=I_2$. ■

Remarque : En résumé, l'ordre d'une matrice $A\in GL_n(\mathbb{Z})$ appartient à $\{1,2,3,4,6,+\infty\}$ et ces valeurs sont atteintes. Par exemple l'ordre des matrices ci-dessous

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

est respectivement $1,2,3,4,6$ et $+\infty$.

Exercice 21. *Soient $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$ et $B^n=0$. Montrer que $\det(A+B)=\det(A)$ (distinguer successivement les cas $A=I_n$, A est inversible puis quelconque).*

Solution : On procède par étapes :
• Si $A=I_n$ c'est facile car B étant nilpotente, il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP=T$ où T est triangulaire à diagonale principale nulle; alors $\det(A+B)=\det(I_n+T)=\det(I_n)$.
• Si $A\in GL_n(\mathbb{R})$ alors comme A et B commutent on a aussi $A^{-1}B=A^{-1}ABA^{-1}=BA^{-1}$; on en déduit aussitôt que BA^{-1} est nilpotente comme B. De là, avec le premier cas : $\det(A+B)=\det(A)\det(I_n+A^{-1}B)=\det(A)$.
• Il nous reste à étudier le cas ou A n'est pas inversible : comme A et B commutent et $B^n=0$ on peut écrire

$$\det\left((A+B)^n\right)=\det\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)=\det\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)=\det(A)\det\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}A^{n-k-1}B^k\right)=0$$

qui implique $\det(A+B)=0=\det(A)$. CQFD. ■

Exercice 22. *Soit $A\in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2=A^4$ et $\text{spec}(A)\supset\{\pm1\}$. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.*

Solution : Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X+1)(X-1)$ est annulateur de A donc le spectre de A est dans $\{0, \pm 1\}$. Deux cas sont alors à envisager :
• 0 n'est pas valeur propre de A alors A est inversible et l'équation $A^2 = A^4$ se réduit à $A^2 = I_3$. A est donc annulé par le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1$: elle est diagonalisable.
• 0 est valeur propre de A. Alors vu l'hypothèse : $\text{spec}(A) = \{0, 1, -1\}$, A admet trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. ■

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr