Mercredi 16 Février 2011, Examen final, durée 2 heures,
pas de documents, calculatrices, téléphones.

Exercice 1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = nx^n(1-x)$.*

(1) *Etudier la simple convergence des deux suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sur $[0,1]$.*

(2) *La suite $(f_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$?*

(3) *La suite $(g_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$?*

Exercice 2. *On rappelle les formules vues en TD que l'on pourra admettre :*

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \forall\, t \in]-1,1[\ : \ \log(1-t) = -\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k}, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k\geq 0} t^k.$$

(1) *Après avoir justifié la convergence des intégrales impropres, montrer que*

$$\int_0^{1/2}\frac{log(1-t)}{t}dt = \int_{1/2}^1 \frac{log(t)}{1-t}dt.$$

(2) *Exprimer chacune des deux intégrales en fonction de* $S := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n n^2}$.

(3) *En déduire que* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\log^2(2)}{2}$.

Exercice 3. *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{1+x^{2n}} := \sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

(1) *Montrer que f est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.*

(2) *La convergence est-elle uniforme sur $[0,1[$?*

(3) *Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.*

(4) *Montrer que $x \in \mathscr{D}$ si et seulement si $1/x \in \mathscr{D}$.*

(5) *Exprimer $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.*

(6) *En déduire que f est continue sur $\mathscr{D}$.*

(7) *Montrer que pour tout $0 < a < 1$ et $|x| \leq a$ on a $|f_n'(x)| \leq 2na^{n-1}$.*

(8) *Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$.*

(9) *Montrer que f est croissante sur $[0,1[$.*

(10) *Avec la question (5), montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]1,+\infty[)$ et précisez ses variations sur $]1,+\infty[$.*

(11) *Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\frac{1}{2(1-x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$.*

(12) *En déduire la limite de f en 1_-.*

(13) *Quelle est la limite de f en 1_+ ?*

(14) *Quelle est la limite de f en $+\infty$?*

(15) *Esquisser le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

I.N.P. **Janvier 2011**

Corrigé de l'examen final.

Corrigé de l'exercice 1 : • La simple convergence sur $[0,1]$ des deux suites de fonctions vers la fonction identuqment nulle ne doit pas poser de problème. Pour la convergence uniforme on étudie les variations de $x \mapsto x^n(1-x)$ sur $[0,1]$ il en résulte aussitot que le $\sup_{0\leq x\leq 1} x^n(1-x)$ est atteint en $x = \frac{n}{n+1}$. Par conséquent : $\sup_{0\leq x\leq 1}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$: la suite $(f_n)_n$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. De même $\sup_{0\leq x\leq 1}|g_n(x)| = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-1}$: la suite $(g_n)_n$ n'est donc pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 2 : Les deux intégrales impropres sont clairement convergentes et on passe de la première à la seconde avec le changement de variables $v = 1-t$. Pour la première :

$$\int_0^{1/2} \frac{log(1-t)}{t}dt = -\int_0^{1/2} \frac{1}{t}\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k}dt \underset{(\text{✘})}{=} -\sum_{k\geq 1}\int_0^{1/2}\frac{t^{k-1}}{k}dt = -\sum_{k\geq 1}\left[\frac{t^k}{k^2}\right]_0^{1/2} = -S.$$

Où l'échange (✘) entre les symboles $\int$ et $\sum$ est justifié puisque la série de terme général $\int_0^{1/2}\frac{t^{k-1}}{k}dt = \frac{1}{2^k k^2}$ converge. Pour la seconde intégrale la procédure est la même :

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 \frac{log(t)}{1-t}dt &= \int_{1/2}^1 \log(t)\sum_{k\geq 0} t^k dt \underset{(\text{✘})}{=} \sum_{k\geq 0}\int_{1/2}^1 \log(t)t^k dt \\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\log(t)\right]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1\frac{t^k}{k+1}dt\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{log(2)}{2^{k+1}(k+1)} - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_{1/2}^1\right) \\ &= \log^2(2) + S - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \log^2(2) + S - \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Où à nouveau l'échange (✘) entre les symboles $\int$ et $\sum$ est justifié par la convergence de la série de terme général $\int_{1/2}^1 |\log(t)t^k|dt$. L'égalité entre les deux intégrales donne alors

$$S := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n n^2} = -\frac{\log^2(2)}{2} + \frac{\pi^2}{12}.$$

Corrigé de l'exercice 3 : Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

(1) L'inégalité $|\frac{x^n}{1+x^{2n}}| \leq |x|^n$ assure la simple convergence de la série de fonctions sur $]-1,1[$ et l'inégalité $|\frac{x^n}{1+x^{2n}}| \leq |x|^{-n}$ assure la simple convergence de la série de fonctions sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. La série étant clairement divergente en $x=1$ et $x=-1$, la domaine de définition de f est bien $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(2) Comme f_n est continue sur $[0,1]$: $\sup_{x\in[0,1[}|f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$; alors, comme $f_n(1) = 1/2$, la convergence ne peut être normale sur $]-1,1[$. Toutefois elle pourrait être tout de même uniforme. Ce n'est pas le cas mais c'est un peu délicat : si la convergence est uniforme sur $[0,1[$ alors le critère de Cauchy uniforme sur $[0,1[$ est vérifié, il l'est donc aussi sur $[0,1]$ par continuité des f_n mais cela est absurde car cela impliquerai la convergence de la série en $x=1$. Plus simplement, si la convergence uniforme sur $[0,1[$ alors (en passant aux sommes partielles nous avons en particulier $\lim_n \sup_{t\in[0,1[}|S_{n+1}(t) - S_n(t)| = 0$ mais $\sup_{t\in[0,1[}|S_{n+1}(t)-S_n(t)| = \sup_{t\in[0,1[}|f_{n+1}(t)| = 1/2$.

(3) Soit $0<a<1$. Nous avons $\sup_{x\in[-a,a]}|f_n(x)| \leq a^n$ terme général d'une série convergente. La convergence est donc normale sur $[-a,a]$ pour tout $0<a<1$. Les fonctions f_n étant continue sur $\mathscr{D}$, le cours assure que $f\in\mathscr{C}([-a,a])$ pour tout $0<a<1$ i.e. $f\in\mathscr{C}(]-1,1[)$.

(4) Comme $x\in]-1,1[\setminus\{0\} \iff 1/x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ la question est évidente.

(5) On démontre sans peine que $f(1/x) = f(x)$.

(6) Comme $x\mapsto 1/x$ échange les intervalles $]-1,1[$ et $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, et comme $f(1/x) = f(x)$; la continuité de f sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ équivaut à celle de f sur $]-1,1[$. f est donc continue sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et donc sur $\mathscr{D}$ d'après la question (3).

(7) Pour $|x|\leq a<1$: $|f_n'(x)| = \left|\frac{nx^{n-1}(1-x^{2n-1})}{(1+x^{2n})^2}\right| \leq nx^{n-1}(1-x^{2n-1}) \leq 2na^{n-1}$.

(8) Comme la série de terme général $2na^{n-1}$ converge, il en résulte la normale convergence de $\sum_n f_n'$ sur $[-a,a]$ pour tout $0<a<1$. Le théorème de Weierstrass sur la dérivation des séries de fonctions assure alors que f est de classe C^1 sur tout $[-a,a]$ $(0<a<1)$ soit $f\in\mathscr{C}^1(]-1,1[)$

(9) Le même théorème de Weierstrass assure aussi que pour tout $x \in [0,1[$: $f'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n-1})}{(1+x^{2n})^2} \geq 0$. f est donc croissante sur $[0,1[$.

(10) Comme pour tout $x > 1$: $f(x) = f(1/x)$ et que $x > 1$ implique $1/x \in]0,1[$, la question précédente assure que $f \in \mathscr{C}^1(]1,+\infty[)$ comme composée de fonction de classe C^1. En outre, en dérivant l'égalité précédente, on a aussi pour $x > 1$: $f'(x) = -f'(1/x)/x^2 < 0$ (puisque $f' > 0$ sur $]0,1[$). f est donc décroissante sur $]1,+\infty[$.

(11) Pour tout $0 < x < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on a l'inégalité $\frac{x^n}{2} \leq f_n(x) \leq x^n$. En la sommant on en déduit $\frac{1}{2(1-x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$ puisque $\sum_{n\geq 0} u^n = \frac{1}{1-u}$.

(12) La double inégalité précédente et le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x\to 1_-} f(x) = +\infty$.

(13) Avec (5) : $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} f(1/x) = \lim_{u\to 1_-} f(u) + \infty$. La double inégalité précédente donne aussi $\frac{u}{2(u-1)} \leq f(u) \leq \frac{u}{u-1}$ pour $u = 1/x > 1$.

(14) Toujours avec (5) $\lim_{x\to 1+\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(1/x) = \lim_{u\to 0} f(u) = 1/2$.

(15) Pour le graphe j'essaie de tracer...........

3 mars 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr