Mercredi 23 Mars 2011, Examen Final Bis , Durée 1 heure 30, pas de documents, calculatrices, téléphones.

Exercice 1. *Pour $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}$ calculer le déterminant de la matrice*

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Pour quelles valeurs de a est-elle de rang maximal ?

Exercice 2. *Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose* $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 & a^2 \\ 1 & 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix}$.

(1) *Etudier, suivant les valeurs des paramètre réel a le rang de M_a.*

(2) *Pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a est-elle inversible ?*

(3) *Sans faire calculs, pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ sommes nous assurés que le système linéaire*

$$(\mathscr{S}_a) \ : \ \begin{cases} x + a^2y - z + a^2t & = u_1 \\ x + y - z + a^2t & = u_2 \end{cases}$$

*admet des solutions **pour tout** $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$?*

(4) *Pour les valeurs de a trouvées dans la question précédente, discuter de l'allure de l'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S}_a)$.*

(5) *Existe-t-il des valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système $(\mathscr{S}_a)$ admet une unique solution ?*

(6) *Résoudre le système* $(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} x + 2y - z + 2t & = 0 \\ x + y - z + 2t & = 0 \end{cases}$

(7) *Résoudre le système* $(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} x + y - z + t & = 2011 \\ x + y - z + t & = 2011 \end{cases}$.

Exercice 3.

(1) *Calculer le déterminant de la matrice* $M_z := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 - |z|^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 - |z-2|^2 \end{pmatrix}$ ***où*** $z \in \mathbb{C}$.

(2) *Discuter du rang de M_z suivant les valeurs de $z \in \mathbb{C}$.*

(3) *Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{C}$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que M_z ne soit pas de rang maximal et préciser l'aire du domaine borné contenant l'origine et délimité par $\mathscr{C}$.*

☯ Fin de l'épreuve ☯

19 mars 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

I.N.P. **Mars 2011**

☯ ☢ ☯ **Corrigé de l'examen final bis.** ☯ ☢ ☯

Corrigé de l'exercice 1 : On ajoute à la colonne 1 les autres colonnes ce qui permet de mettre en facteur $1+(n-1)a$. Il n'y a alors que des 1 dans la colonne 1 : on soustrait alors la ligne 1 à toutes les autres lignes. Il reste une matrice triangulaire supérieure avec des $a-1$ partout sur la diagonale sauf en position $(1,1)$ où se trouve un 1. Donc $\det M_a = (a-1)^{n-1}(1+a(n-1))$. Ainsi la matrice sera de rang non maximal si $a=1$ ou $a=-1/(n-1)$ (ne pas oublier que $n\geq 2$).

Corrigé de l'exercice 2 :

(1) C'est une matrice 2×4 : son rang est au plus 2 et au moins un car elle possède des mineurs d'ordre 1 non nuls. Elle sera de rang deux si au moins un mineur d'ordre 2 est non nul. Les mineurs d'ordre 2 susceptibles de ne pas s'annuler sont a^2-1 et $a^2(a^2-1)$. Donc M_a sera de rang 1 si $a=\pm 1$ et de rang 2 sinon.

(2) La matrice M_a n'est pas carrée : il ne peut être inversible.

(3) Les valeurs de paramètres réels a tels que le système $\mathscr{S}_a$ admette des solutions **pour tout** $(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ correspondent aux paramètres a tels que M_a est la matrice d'une application surjective, donc de rang 2. Donc, vu la question 1, il s'agit de des réels $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

(4) Pour $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ la matrice M_a est de rang 2, son noyau (toujours l'identification matrice/endomorphisme) est (théorème du rang) donc de dimension 2 et le cours assure donc que l'ensemble des solutions du système S_a sera de la forme $\{X_0\}+\ker M_a$ (X_0 est une solution particulière) donc un espace affine de dimension 2.

(5) Vu (1) M_a est de rang 1 ou 2, donc $\ker M_a$ est de dimension 3 ou 2 donc M_a ne peut être injective et par suite le système $\mathscr{S}_a$ n'aura jamais une unique solution.

(6) On tire sans peine $y=0$ et $z=x+2t$ par suite $S=\text{vect}\{{}^t(1,0,1,0),\ {}^t(0,0,2,1)\}$.

(7) Ici, le système équivaut à l'unique équation $z=2011-x-y-z$ soit $S=\{{}^t(2011,0,0,0)\}+\text{vect}\{{}^t(1,0,-1,0),\ {}^t(0,1,-1,0), {}^t(0,0,-1$

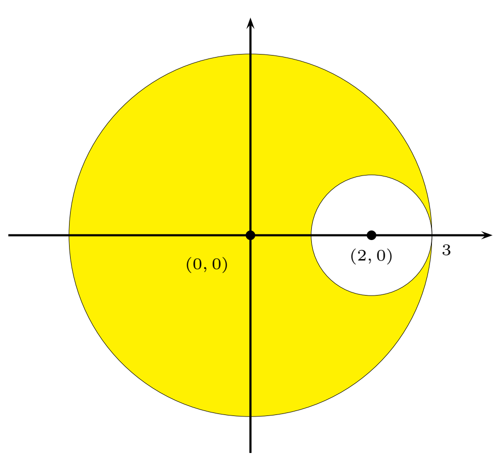
Corrigé de l'exercice 3 :

(1) Nous avons (en écrivant $z\overline{z}=|z|^2$) :

$$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&10-|z|^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&6-|z-2|^2)\end{vmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_4-L_3}{=}\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&10-|z|^2&2&3\\2&3&1&5\\0&0&0&1-|z-2|^2)\end{vmatrix}=(1--|z-2|^2))\begin{vmatrix}1&1&2\\1&10-|z|^2&2\\2&3&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=}(1-|z-2|^2)\begin{vmatrix}1&1&2\\0&9-|z|^2&0\\2&3&1\end{vmatrix}=(1-|z-2|^2)(9-|z|^2)\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3(1-|z-2|^2)(9-|z|^2).$$

(2) Par ce qui précède $\det(M_z)=0$ si et seulement si $|z-2|=1$ ou $|z|=3$. Il s'agit des deux cercles $C(0,3), C(2,1)$ (voir la figure ci-dessous). Le domaine en question est $D(0,3)\setminus D(1,2)$ (en jaune sur la figure) et son aire est trivialement $9\pi-4\pi=5\pi$.



19 mars 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr