☯ ☢ ☯ Systèmes et Déterminants – Examen Final. ☯ ☢ ☯

Jeudi 10 Mars 2011, Examen final, durée 1 heure 30, pas de documents, calculatrices, téléphones.

Exercice 1. *Déterminer les* $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^\star)^3$ *solutions de* $\begin{cases} xy^{-1}z &= 1 \\ x^2yz &= e \\ x^2y^{-1}z^2 &= e^2\end{cases}$. *en se ramenant à la résolution d'un véritable système linéaire par une tranformation convenable.*

Exercice 2. *Pour* $a,b\in\mathbb{R}$ *on pose* $A_{a,b}=\begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b\end{pmatrix}$.

(1) *Calculer (sous forme factorisée) le déterminant de* $A_{a,b}$.

(2) *Etudier, suivant les valeurs des paramètres* a *et* b, *le rang de* $A_{a,b}$.

(3) *Sans faire calculs, pour quelles valeurs du paramètre réel* $\alpha\in\mathbb{R}$ *sommes nous assurés que le système linéaire*

$$(\mathscr{S}_\alpha)\ :\quad \begin{cases} \alpha x+y+z+t &= u_1 \\ x+\alpha y+z+t &= u_2 \\ x+y+\alpha z+t &= u_3 \\ x+y+z+\alpha t &= u_4\end{cases}$$

admet des solutions ***pour tout*** $(u_1,u_2,u_3,u_4)\in\mathbb{R}^4$ *?*

(4) *Pour les valeurs des* α *trouvées dans la question précédente, donner la solution du système* $(\mathscr{S}_\alpha)$ *à l'aide de déterminants que l'on ne calculera pas.*

(5) *Discuter de l'allure de l'ensemble des solutions du système* $(\mathscr{S})\ :\ \begin{cases} x+y+z+t &= u_1 \\ x+y+z+t &= u_2 \\ x+y+z+t &= u_3 \\ x+y+z+t &= u_4\end{cases}$

(6) *Résoudre le système* $(\mathscr{S})$ *lorsqu'il admet des solutions.*

Exercice 3.

(1) *Soit* $z=a+ib\in\mathbb{C}$. *Montrer que* $z\overline{z}=|z|^2$.

(2) *Calculer le déterminant de la matrice* $M_z:=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10-z\overline{z} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1-(z-2)\overline{(z-2)}\end{pmatrix}$ *où* $z\in\mathbb{C}$.

(3) *Discuter du rang de* M_z *suivant les valeurs de* $z\in\mathbb{C}$.

(4) *Représenter graphiquement l'ensemble* $\mathscr{C}$ *des* $z\in\mathbb{C}$ *tels que* M_z *ne soit pas de rang maximal et préciser l'aire du domaine borné contenant l'origine et délimité par* $\mathscr{C}$.

☯ Fin de l'épreuve ☯

18 mars 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

I.N.P. **Mars 2011**

◑ ☢ ◑ Corrigé de l'examen final. ◑ ☢ ◑

Corrigé de l'exercice 1 : x, y et z étant strictement positifs, on prend le log et le système non linéaire se transforme en le système linéaire

$$\begin{cases} \log(x) - \log(y) + \log(z) & = 0 \\ 2\log(x) + \log(y) + \log(z) & = 1 \\ 2\log(x) - \log(y) + 2\log(z) & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - v + w & = 0 \\ 2u + v + w & = 1 \\ 2u - v + 2w & = 2 \end{cases}$$

avec le changement de variable $u = \log(x), v = \log(y)$ et $v = \log(z)$. C'est un système de Cramer dont on trouve facilement l'unique solution $(u, v, w) = (-3, 2, 5)$. Il ne reste plus qu'à prendre l'exponentielle, on tombe alors sur les solutions du système initial qui admet finalement l'unique solution $(x, y, z) = (e^{-3}, e^2, e^5)$.

Corrigé de l'exercice 3 :

(1) Nous avons

$$\det(A_{a,b}) = \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \cdots + L_4}{=} (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_i \leftarrow C_i - C_1, 2 \leq i \leq 4}{=} (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3.$$

(2) La matrice sera de rang maximal, c'est à dire 4 si le vecteur (a, b) se trouve en dehors des deux droites d'équation $a = b$ et $b = -3a$. Si (a, b) se trouve sur la droite d'équation $b = a$ alors les quatre colonnes de $M_{a,b}$ sont les mêmes et, ou bien $a = b = 0$ et son rang est nul, ou bien $M_{a,b}$ est de rang 1. Enfin, si (a, b) se trouve sur la droite d'équation $b = -3a$ et si $a \neq 0$ alors

$$M_{a,-3a} = \begin{pmatrix} -3a & a & a & a \\ a & -3a & a & a \\ a & a & -3a & a \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix}$$

Comme la somme des quatre colonnes $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ est nulle $C_1 = -C_2 - C_3 - C_4$ et $M_{a,-3a}$ est donc de rang 3 car il est très facile de vérifier que les colonnes C_2, C_3, C_4 sont libres.

(3) La matrice associée au système $(\mathscr{S}_\alpha)$ est $M_{1,\alpha}$ et comme le système doit admettre des solutions **pour tout** $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ la matrice associée doit être surjective ; soit, vu ce qui précède $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

(4) Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ nous avons un système de Cramer dont les coordonnées de l'unique solution sont données par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 1 & 1 & 1 \\ u_2 & \alpha & 1 & 1 \\ u_3 & 1 & \alpha & 1 \\ u_4 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(3+\alpha)(\alpha-1)^3} y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & u_1 & 1 & 1 \\ 1 & u_2 & 1 & 1 \\ 1 & u_3 & \alpha & 1 \\ 1 & u_4 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(3+\alpha)(\alpha-1)^3}, z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & u_1 & 1 \\ 1 & \alpha & u_2 & 1 \\ 1 & 1 & u_3 & 1 \\ 1 & 1 & u_4 & \alpha \end{vmatrix}}{(3+\alpha)(\alpha-1)^3}, \ t = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & \alpha & 1 & u_2 \\ 1 & 1 & \alpha & u_3 \\ 1 & 1 & 1 & u_4 \end{vmatrix}}{(3+\alpha)(\alpha-1)^3}.$$

(5) Le rang de la matrice du système est 1, il y aura donc des solutions si et seulement si le second membre est dans l'image de $M_{1,1}$ i.e. appartient à la droite d'équation $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions sera de la forme $\{X_0\} + \ker(M_{1,1})$ soit un sous-espace affine de dimension trois.

(6) C'est classique, vu ce qui précède il y aura des solutions si et seulement si $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u$ et dans ce cas $S = \{X_0\} + \ker(M_{1,1})$. $X_0 = (u, 0, 0, 0)$ est solution particulière et comme le noyau est clairement engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0, -1), e_2 = (1, -1, 0, 0)$ et $e_3 = (1, 0, -1, 0)$ donc $S = \{(u, 0, 0, 0)\} + \text{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$.

Corrigé de l'exercice 3 :

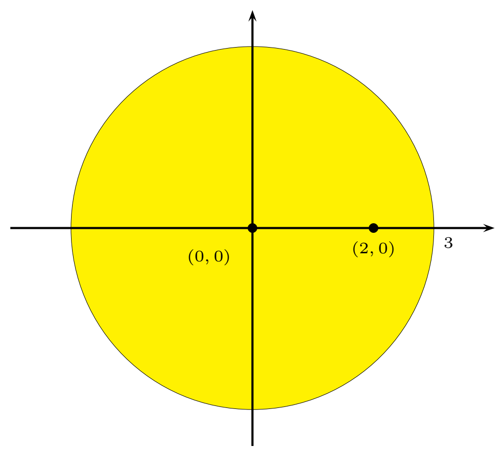
(1) Nous avons (en écrivant $z\overline{z} = |z|^2$) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10-|z|^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1-|z-2|^2) \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10-|z|^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4-|z-2|^2) \end{vmatrix} = -(1+|z-2|^2)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 10-|z|^2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} -(4+|z-2|^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9-|z|^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(4+|z-2|^2)(9-|z|^2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(4+|z-2|^2)(9-|z|^2).$$

(2) Par ce qui précède $\det(M_z) = 0$ si et seulement si $|z| = 3$. Il s'agit du cercle $C(0,3)$ (voir la figure ci-dessous) on vérifie sans peine que la matrice est alors de rang 3 sur ce cercle.

(3) Le domaine en question est le disque $D(0,3)$ (en jaune sur la figure) et son aire est trivialement 9π.



18 mars 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr