I.N.P. **3 novembre 2010**

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle ☯ ☢ ☯
EXAMEN FINAL.

ℹ `Durée 1h30, documents, calculatrices, téléphones interdits.`
`Les logarithmes sont tous népériens.`

Exercice 1. ***(Cours).***

(1) *Que dire d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant « $\forall A \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 : x < A \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$ » ?*

(2) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, donner la définition (avec les ϵ...) de la propriété « f est continue au point $c \in \mathbb{R}$ ».*

(3) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, donner la définition équivalente (avec les suites...) de la propriété « f est continue au point $c \in \mathbb{R}$ ».*

(4) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, donner la définition de « f est surjective ».*

Exercice 2. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.*

(1) *Montrer que P_n admet au moins une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.*

(2) *Etudier les variations de P_n sur $\mathbb{R}_+$.*

(3) *En déduire que P_n admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$; on la notera a_n.*

(4) *Calculer a_1, a_2.*

(5) *Montrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.*

(6) *Montrer que pour tout $x \neq 1$ on a $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$.*

(7) *Montrer que $0 < a_n - \dfrac{1}{2}$.*

(8) *En déduire que $0 < a_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_n^{n+1}}{2} < \dfrac{a_2^{n+1}}{2}$.*

(9) *En déduire que la suite $(a_n)_n$ converge et préciser sa limite.*

(10) *Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$.*

(11) *Montrer que $P_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.*

(12) *P_n réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$?*

(13) *P_n réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1, +\infty[$?*

(14) *P_n est-elle majorée sur $\mathbb{R}$? est-elle minorée sur $\mathbb{R}_+$? préciser ses éventuels extrémas.*

(15) *Montrer que $\sup_{x \in [0,3]} P_5(x) = 362$ (précisez vos calculs).*

Tournez la page s.v.p.

Exercice 3. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 4. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([2,3],\mathbb{R})$ *telle que* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in [2,3]$.

(1) *Montrer qu'il existe* $m > 0$ *tel que* $f(x) > m$ *pour tout* $x \in [2,3]$. $\mathscr{M}$ *désignera l'ensemble de tous les réels* m *vérifiant cette propriété.*

(2) *Montrer que l'ensemble* $\mathscr{M}$ *est majoré et exprimer sa borne supérieure en fonction de* f.

(3) *Montrer par un exemple simple que si* f *est seulement continue sur* $]2,3]$ *l'ensemble* $\mathscr{M}$ *peut être vide.*

Fin de l'épreuve

3 novembre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr

Corrigé.

Corrigé de l'exercice 1 : Voir le cours.

Corrigé de l'exercice 2 :

(1) $P_n(0) = -1 < 0$ et $P_n(1) = n-1 \geq 0$; P_n polynôme est continu sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires P_n admet au moins une racine dans $[0,1]$.

(2) $P_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: P_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(3) P_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ la racine localisée dans la question 1 est unique.

(4) $P_1(x) = x - 1, P_2(x) = x^2 + x - 1$ donc $a_1 = 1, a_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$.

(5) $P_n(a_n) = 0$ soit $a_n^n + a_n^{n-1} + \cdots + a_n = 1$, donc $P_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + a_n^n + a_n^{n-1} + \cdots + a_n - 1 = a_n^{n+1} + 1 - 1 = a_n^{n+1} > 0 = P_{n+1}(a_{n+1})$ donc (P_{n+1} étant strictement croissante) $a_{n+1} < a_n$ et la suite $(a_n)_n$ est bien décroissante.

(6) Avec la formule donnant la somme des premiers termes d'une série géométrique nous avons pour $x \neq 1$

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 - 2 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 2 = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}.$$

(7) Par la question précédente nous avons $P_n(1/2) = -2^{-n} < 0 = P_n(a_n)$ donc par croissance de P_n : $1/2 < a_n$ i.e. $0 < a_n - 1/2$.

(8) Maintenant $P_n(a_n) = 0$ avec (7) donnent : $a_n - 1/2 = a_n^{n+1}/2 < a_2^{n+1}/2$ où la dernière inégalité découle de la décroissance de la suite $(a_n)_n$.

(9) $0 < a_2 < 1$ implique $\lim_n a_2^{n+1} = 0$ alors l'inégalité de (8) et le théorème des gendarmes donnent $\lim_n a_n = 1/2$.

(10) Vu (6) et la continuité de P_n : $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} P_n(x) = P_n(1) = n - 1$.

(11) P_n est injective sur $\mathbb{R}_+$ car strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(12) Comme P_n est strictement croissante : $P_n(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[\neq \mathbb{R}$: elle n'est donc pas surjective.

(13) P_n injective sur $\mathbb{R}_+$ est bien entendu bijective en tant que fonction de $\mathbb{R}_+$ sur son image $P_n(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$.

(14) P_n n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+$; son étude de variations faite en (2) assure quelle est minorée sur $\mathbb{R}_+$ elle quelle atteint sa borne inf en 0 avec $P_n(0) = -1$.

(15) Toujours l'étude de (2) implique via la question (6) que $\sup_{x\in[0,3]} P_5(x) = P_5(3) = \frac{3^6-6+1}{3-1} = 362$.

Corrigé de l'exercice 3 :

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = e$

(2) Faire le changement $u = 1/x$: $\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) = \lim_{u\to 0_+} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$

(3) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ car $|x\sin(1/x)| \leq |x|$.

Corrigé de l'exercice 4 :

(1) f est continue sur le fermé borné $[2,3]$: elle est donc bornée et atteint ses bornes : il existe donc $\alpha \in [2,3]$ tel que $f(x) \geq \inf_{x\in[2,3]} f(x) = f(\alpha) > 0$; par conséquent tout réel $0 < m < f(\alpha)$ convient.

(2) Vu ce qui précède $\mathscr{M} =]0, f(\alpha)[$ cet ensemble est bien majoré et $\sup \mathscr{M} = \inf_{x_i n[2,3]} f(x)$.

(3) Sur $]2,3]$ considérez $f(x) = x - 2$.

3 novembre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr