Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices 4.

Devoir 4 (à rendre lundi 18 octobre matin).

Exercice 1. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$, si f n'est pas identiquement nulle, montrer qu'il existe $\delta > 0$, $\eta > 0$ et $c \in]a,b[$ tels que $f(x) > \delta$ pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[$. Montrer que tout ceci tombre en défaut si f n'est pas continue. En déduire que $\int_a^b f(t)dt = 0$.*

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: $|f(x)-f(y)| \geq |x-y|$. Montrer que f est injective puis que f est surjective.*

Exercice 3. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.*

Exercice 4. *Déterminer toutes les applications $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(x)^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 5. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'étant donnés $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que*

$$f(x_0) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Exercice 6. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, si f est périodique de période $T > 0$, montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0+T/2) = f(x_0)$.*

Exercice 7. • *Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$; même question pour $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.*
• *Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 8. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. En considérant la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Illustrez graphiquement ce résultat.*

Exercice 9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective ; montrer que f est soit strictement croissante soit strictement décroissante. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(f \circ f)(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 10. *On cherche toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(f \circ f)(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Pour cela on pose $\mathscr{E} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$; montrer successivement que $\mathscr{E}$ est non vide puis égal à $f(\mathbb{R})$. En déduire une méthode pour construire des solutions de l'équation fonctionnelle.*

Exercice 11. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(f \circ f \circ f)(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 12. *Montrer que toute bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ possède une infinité de points de discontinuité.*

Exercice 13. *On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy : $(\mathscr{E})\quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.*
0) Montrer que $(\mathscr{E})$ admet des solutions.
Soit f une solution de $(\mathscr{E})$
1) Montrer que f est impaire.
2) Montrer que $f(nx) = nf(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}$.
4) Montrer que $f(rx) = rf(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$.
3) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (vous pouvez utiliser le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
ℹ *Pour la culture $(\mathscr{E})$ admet aussi des solutions discontinues... mais c'est une autre histoire...*

Exercice 14. • *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle $]0,1]$ des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \log(x), \qquad f(x) = cotan(x), \quad f(x) = e^x \cos(1/x).$$

• *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle $[0,+\infty[$ des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = x\sin(x), \quad f(x) = \sin^2(x), \quad f(x) = \sin(x^2), \quad f(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

Exercice 15. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ? Si de plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ montrer que f atteint au moins une de ses bornes.*

Exercice 16. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 17. *Etudier la continuité la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = arctan(x)$ et de $f(x) = x\sin(1/x)$ sur $[0, +\infty[$.*

Exercice 18. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si f est périodique montrer que f est uniformément continue, bornée et atteint ses bornes ; montrer aussi que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $x_a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_a + a) = f(a)$.*

Exercice 19. *Montrer que la fonction $f(x) = \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue, en déduire qu'elle ne peut être périodique (voir aussi l'exercice 5 de la feuille 1).*

Exercice 20. *Soit f, g deux fonctions uniformément continues sur $[a, b]$ (resp. $[a, +\infty[$). Cela implique-t-il la continuité uniforme sur $[a, b]$ (resp. $[a, +\infty[$) des fonctions $f + g$, fg, $x \mapsto f(x)\sin(x)$?*

Exercice 21. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; si f est bornée montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.*

Exercice 22. *Montrer que $f(x) = x + x^2 + 2x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $|f^{-1}(y)| \leq \alpha|y|, \ \forall y \in \mathbb{R}$.*

Exercice 23. *Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ prenant exactement deux fois chaque valeurs.*

Exercice 24. *Etudier la continuité et donner le graphe de la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

Est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}_+$? $\mathbb{R}_+^\star$?

Exercice 25. *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$ des fonctions suivantes :*

$$f(x) = e^{1/x}, \qquad f(x) = \cos(x)\cos(\pi/x).$$

6 octobre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/INP.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr