UNIVERSITÉ PAUL SABATIER 2010-2011

MASTER MEI

EXAMEN PARTIEL D'ANALYSE : DURÉE 2 H

Exercice 1.

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose $\nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int_E f\chi_A\, d\mu$.

1. Soient $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{T}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux. Montrer que $\nu\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) = \sum_{k=1}^n \nu(A_k)$.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux. Montrer que $\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(A_k)$.

Exercice 2.

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soient f_n, $n \in \mathbb{N}$, f des fonctions intégrables telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Pour tout $a > 0$, on pose

$$S_n(a) = \{|f_n - f| \geq a\} = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}.$$

1. Montrer que $\mu(S_n(a)) \leq a^{-1} \int_E |f_n - f|\, d\mu$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mu(S_n(a))$.

Exercice 3.

On considère la fonction $f : [0,1]\times]0, +\infty[$ définie par $f(t,x) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et on pose, pour tout $x > 0$, $h(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t,x)\, dt$.

1. Justifier l'existence de $h(x)$ et montrer que h est $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]0, a[$ avec $a > 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $h = c - g^2$ où $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

T.S.V.P.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée telle que $f(0) \neq 0$.

1. Justifier l'existence de $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}\, dt$.

2. En utilisant un changement de variable et le Théorème de convergence dominée, trouver un équivalent de a_n.