Université Paul Sabatier, 17 novembre 2010 Master MEI
☯ ☢ ☯ MEIS7M2 – Feuille d'exercices 9. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Montrer que transformée de Fourier de la fonction* $(x) = e^{-\pi x^2}$ *vérifie* $\mathscr{F}(t) = f$.

Exercice 2. *Pour* $t \in \mathbb{R}_+^\star$ *on pose* $q_t(x) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$. *Calculer la transformée de Fourier de* q_t *et dire que* $q_t \star q_s = q_{t+s}$.

Exercice 3. *Montrer que pour tout* $a > 0$: $\mathscr{F}\left(x \mapsto \dfrac{x}{(a^2+x^2)^2}\right)(y) = -\dfrac{i\pi^2}{a}\exp(-2\pi|y|)$.

Exercice 4. (1) *Calculer la transformée de Fourier de la fonction « triangle » :* $f(x) = 1 + x,\ x \in [-1, 0],\ f(x) = 1 - x,\ x \in [0, 1]$ *et nulle ailleurs.*
(2) *Retrouver ce résultat en reconnaissant en* f *un produit de convolution.*
(3) *En « déduire » la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\cos(xt)dt$.

Exercice 5. *Soient* $f_a(x) := \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, $g_a(x) = \dfrac{\sin(ax)}{\pi x}$, $(a \in \mathbb{R})$. *Montrer que l'on a* $f_a \star f_b = f_{a+b},\ g_a \star g_b = g_{\min\{a,b\}}$.

Exercice 6. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^\star$, *calculer la transformée de Fourier de la fonction* $f_a(x) = \left(1 - \left|\dfrac{x}{a}\right|\right)\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$.

Exercice 7. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^\star$ *on pose* $f_a(x) = e^{-a|x|}$.
(1) *Calculer la transformée de Fourier de* f_a.
(2) *A l'aide de la formule de réciprocité en déduire celle de* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
(3) *Calculer* $f_a \star f_a$ *pour en déduire la transformée de Fourier de* $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
(4) *Drminer la transformée de Fourier de* $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 8. *(Transformée de Fourier et convolution dans* $L^1(\mathbb{R})$*).*
(1) *En utilisant la tranformée de Fourier, montrer que l'algèbre* $(L^1(\mathbb{R}), \star)$ *ne possède pas d'unité (i.e. il n'existe pas de fonction* $g \in L^1(\mathbb{R})$ *vérifiant* $f \star g = f$ *pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R})$.
(2) *Résoudre dans* $L^1(\mathbb{R})$ *l'équation* $f \star f = f$.

Exercice 9. (1) *Montrer que* $f(x) = \sin(x)/x \in L^2(\mathbb{R})$.
(2) *Montrer que si* $g(t) = H(1 - |t|)$ *alors* $\mathscr{F}(g) = 2f$.
(3) *En déduire* $\mathscr{F}(f)$.
(4) *En déduire que* $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 10. *(Transformée de Fourier et convolution dans* $L^2(\mathbb{R})$*).*
(1) *Calculer la transformée de Fourier de* $\mathbf{1}_{[a,b]}$.
(2) *La fonction* $x \mapsto \sin(x)/x$ *est-elle dans* $L^1(\mathbb{R})$ *? dans* $L^2(\mathbb{R})$ *? Calculer sa transformée de Fourier-Plancherel.*
(3) *On note* $f_a(x) := \sin(ax)/x$ *; calculer* $f_a \star f_b$ *et en déduire que l'équation* $f \star f = f$ *admet une infinité de solutions dans* $L^2(\mathbb{R})$.

17 novembre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr