Université Paul Sabatier, 3 novembre 2010 Master MEI

☯ ☢ ☯ MEIS7M2 – Feuille d'exercices 8. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *(quelques calculs).*

(1) *(convolution de densités gaussiennes). Pour* $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ *on pose* $g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x_m)^2}{2\sigma^2})dx$. *Soient* $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$, *montrer que le produit de convolution* $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}$ *est bien défini, que* $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2} \in L^p(\mathbb{R})$ *pour tout* $p \in [1, +\infty]$. *Enfin montrer que* $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2} = g_{m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$. *Interprétation probabilistique ?*

(2) *Pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *existe-t-il un résultat du cours assurant l'existence du produit de convolution* $(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{\alpha x}) \star (\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{\beta x})$; *justifier son existence et le calculer.*

Exercice 2. *Soit* $f_x(t) := t^{x-1}e^{-t}$. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *la fonction*f_x *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^\star$. *On définit alors la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty f_x(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) *Montrer que* $f_x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \big(\log(t)\big)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

(2) *Soient* $\alpha > 0,\ \beta > 0$. *Montrer que* $f_\alpha \star f_\beta$ *est bien définie et* $f_\alpha \star f_\beta \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

(3) *En calculant l'intégrale de* $f_\alpha \star f_\beta$ *montrer que*

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}du.$$

Exercice 3. (1) *Montrer que l'espace* $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ *des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *á support compact est stable par convolution.*

(2) *On se propose de démontrer maintenant que l'espace* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *n'est pas stable par convolution. Pour cela on pose* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \max\{0\ ,\ 1 - n^4|x-n|\}$. *Montrer successivement que* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *que* $f \star f \in L^1(\mathbb{R})$ *mais que* $(f \star f)(k)$ *n'est pas défini pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. *En utilisant la convolution par* $\mathbf{1}_{[0,1]}$ *montrer qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans* $L^1(\mathbb{R})$. *(i.e. il n'existe pas de fonction* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *vérifiant pour tout* $g \in L^1(\mathbb{R})$: $f \star g = g$ *presque partout.* $(L^1(\mathbb{R}), \star)$ *est donc une algèbre de Banach non unitaire.*

Exercice 5. *Soit* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *de mesure de Lebesgue finie et non nulle. Montrer en utilisant la fonction* $\mathbf{1}_{-A} \star \mathbf{1}_A$ *que* $A - A := \{x - y,\ x, y \in A\}$ *contient un voisinage de l'origine (en fait il arrive même que* $A - A$ *contienne un voisinage de l'origine lorsque* A *est de mesure nulle : par exemple* $A - A = [-1, 1]$ *si* $A = K_3$ *l'ensemble triadique de Cantor).*

Exercice 6. *Soient* $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *telles que* $f', g' \in L^\infty(\mathbb{R})$; *si* f *et* g' *sont dans* $L^1(\mathbb{R})$, *montrer que* $f \star g$ *est bien définie et* $f \star g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Exercice 7. *(le théorème de Weierstarss). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose*

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt, \qquad p_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

(1) *Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, montrer que $f \star p_n$ est un polynôme sur $[-1/2, 1/2]$.*

(2) *En déduire le théorème de Weierstrass.*

Exercice 8. *Pour $1 \leq p < \infty$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on considère l'opérateur $T_g \ : \ L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto T_g(f) = f \star g$ et pour $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ l'opérateur $U_g \ : \ L^p(\mathbb{R}^d) \mapsto T_g(f) = f \star g$*

(1) *Montrer que $T_g \in \mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^d), L^p(\mathbb{R}^d))'$ et est de norme $\leq \|g\|_p$.*

(2) *A l'aide d'une suite régularisante $(\rho_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ montrer que $|||T_g|||_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^d), L^p(\mathbb{R}^d))'} = \|g\|_p$.*

(3) *Montrer que $U_g \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^d), L^1(\mathbb{R}^d))'$ et est de norme $\leq \|g\|_1$.*

(4) *On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $g_n(x) = n^{-d}\|g\|_1^{-1} h(nx)$; montrer que $f \star g_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En déduire la norme de U_g.*

3 novembre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr