Université Paul Sabatier, 19 octobre 2010 Master MEI

☯ ☢ ☯ MEIS7M2 – Feuille d'exercices 7. ☯ ☢ ☯

Dans tout ce qui suit et sauf mention contraire, Ω désigne un ouvert (ou même une partie de mesure strictement positive) de $\mathbb{R}^d$ et $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables sur Ω telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Soit $1 < p < +\infty$. On dira qu'une suite $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)d\lambda(x) = \int_\Omega f(x)g(x)d\lambda(x), \quad \forall\, g \in L^q(\Omega) \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(1) *Montrer que la convergence usuelle (i.e. dans $L^p(\Omega)$) implique la convergence faible.*

(2) *La réciproque est fausse. Vérifiez le dans $L^2([0, 2\pi])$ avec la suite de terme général $f_n(x) = \sin(nx)$.*

(3) *Dans $L^2(\Omega)$ on considére une suite $(f_n)_n$ faiblement convergente vers $f \in L^2(\Omega)$ et telle que $\lim_n \|f_n\|_2 = \|f\|_2$. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^2(\Omega)$.*

Exercice 2. *Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ avec $p \neq q$ et une suite $(f_n)_n \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. On suppose que $\lim_n f_n = 0$ dans $L^p(\Omega)$; si $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^q(\Omega)$ montrer quelle converge aussi vers 0 dans $L^q(\Omega)$.*

Exercice 3. *Soient $1 \leq p, q < +\infty$, $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ et $r > 0$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer la forme généralisée de l'inégalité de Hölder vue en cours : $fg \in L^r(\Omega)$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.*

Exercice 4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et telle que f et $1/f$ appartiennent à $L^1(\Omega)$. Montrer que $\lambda(\Omega) < \infty$.*

Exercice 5. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ une partie mesurable de masse finie : $\lambda(E) < \infty$ et soient $1 \leq p < q \leq \infty$. Montrer que $L^q(E) \subset L^p(E)$ et plus précisément*

$$\|f\|_p \leq \lambda(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad \forall\, f \in L^q(E).$$

En déduire que l'injection canonique $L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$ est aussi continue.

Exercice 6. ***(l'inégalité de Hardy).*** *Pour $1 < p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+^\star)$ et $x \in \mathbb{R}_+^\star$ on pose :*

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \qquad \forall\, f \in,\ x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

(1) *On suppose dans cette question de f est en outre positive et continue à support compact (i.e. nulle en dehors d'une intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^\star$.*

  (a) *Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R}_+^\star)$.*

  (b) *Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty T(f)^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty f(x)T(f)^{p-1}(x)dx$ (indic : on pourra montrer que Tf est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et penser à une intégration par parties.......).*

  (c) *En déduire que $\|T(f)\|_p \leq \dfrac{p}{p-1}\|f\|_p$.*

(2) *En utilisant la densité dans* $L^p(\mathbb{R}_+^\star)$ *des fonctions continues à support compact (ce sera démontré dans le prochain chapitre...) montrer* ***l'inégalité de Hardy*** *:*

$$\|T(f)\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p, \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{R}_+^\star).$$

(3) *En déduire que* $T \in L^p(\mathbb{R}_+^\star)'$ *et à l'aide des fonctions* $f_n(x) = x^{-1/p}\mathbf{1}_{[1,n]}(x)$ *montrer que la norme de* T *vaut* $p/p-1$ *(vous pourrez utiliser l'inégalité* $(1-y)^p \geq 1-yp,\ y \in [0,1]$*...).*

Exercice 7. *Pour* $p \geq 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ *et* $x \geq 0$ *on pose* $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

(1) *Montrer que* F *est bien définie et que si* q *est l'exposant conjugué de* p *alors*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

(2) *En déduire que si* $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ *est telle que* $f' \in L^p(\mathbb{R}_+^\star)$ *pour un certain* $p \geq 1$ *alors* $\lim_{+\infty} g(x) = 0$.

19 octobre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr
http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html