UNIVERSITÉ PAUL SABATIER 2010-2011

MASTER MEI

ANALYSE TD N°5

Exercice 1. Soit la suite de fonctions

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto f_n(x) := \frac{n^{\frac{3}{2}}\, x}{1+n^2x^2}.$$

1) Tracer rapidement le graphe de la fonction f_n.
2) Montrer que f_n converge simplement, mais pas uniformément (sur $[0,1]$) vers la fonction identiquement nulle.
3) Exhiber une fonction g, intégrable sur $[0,1]$, dominant les f_n, de manière à pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}}\, x}{1+n^2x^2}dx \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Exercice 2. Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une application intégrable sur E.
1) A l'aide du théorème de convergence dominée, établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{1/n \leq |f| \leq n\}} |f|\, d\mu \;=\; \int_E |f|\, d\mu.$$

2) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que

$$\mu(A) < +\infty, \quad \sup_{x\in A} |f(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{A^c} |f|\, d\mu < \epsilon.$$

Exercice 3. Absolue continuité de l'intégrale (autre preuve). Soit $f : (E, \mathcal{T}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ positive intégrable. Montrer que $\int_A f\, d\mu$ tend vers 0 quand $\mu(A)$ tend vers 0 , i.e. :

$$\forall \epsilon \geq 0,\ \exists \delta \geq 0 \text{ tel que : } \big(A \in \mathcal{T}\ ,\ \mu(A) \leq \delta\big) \Longrightarrow \Big(\int_A f\, d\mu \leq \epsilon\Big).$$

(Indication: introduire $A_n := A \cap \{|f| > n\}$ et montrer que $\int_{A_n} f\, d\mu \to$ lorsque $n \to +\infty$.)

Exercice 4. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t) + x^2\cos^2(t)}}\, dt \;\to\; \ln(2) \text{ lorsque } x \to 0.$$

Exercice 5. Montrer que la fonction suivante est définie et continue sur $\mathbb{R}$:

$$F(x) \ := \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2}.$$

Exercice 6. Soit F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} \, dt.$$

Montrer que, pour tout $M > 0$, F est dérivable sur $]-M, M[$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7. Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} cos(xt) \, dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F^{'}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

2) Montrer que F est solution d'une équation différentielle du premier ordre. (Indication: on intègrera par parties la forme trouvée de $F^{'}(x)$ à la question précédente).

3) Résoudre l'équation différentielle en question et en déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $F(x)$. (On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$).

Exercice 8. On considère, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) := \Big(\int_0^x e^{-t^2} dt \Big)^2 \qquad \text{et} \qquad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1) Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et donner les expressions de $F^{'}(x)$ et $G^{'}(x)$.

2) Déduire de ce qui précède que $F + G$ est constante (à déterminer) sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer par des majorations simples que $G(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

4) En déduire (ou retrouver) la valeur (bien connue) de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.