Problème sur la fonction Γ : $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} t^{x-1} dt$

1) On pose $f(x,t) = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} \exp(x-1)\log(t)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$
$f(x,t) \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ est donc intégrable si $x>0$. en $+\infty$ $f(x,t) = o(1/t^2)$ donc pas de problèmes. L'intégrale est donc CV pour tout $x>0$
En outre si $x>0$ on a

$$|f(x,t)| = e^{-t} \exp(x-1)\log(t) \leq \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \geq 1,\ x \in [a,b] \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \in]0,1),\ x \in [a,b] \end{cases}$$

En résumé $|f(x,t)| \leq e^{-t}\left[t^{a-1} 1_{[1,\infty[}(t) + t^{b-1} 1_{]0,1]}(t)\right] = \varphi(t)$
comme $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ par convergence dominée on en déduit que $\Gamma \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$. (car continue sur $[a,b]$ $\forall\, 0<a<b<\infty$) Par le caractère C^∞ on fait de même avec :

$$|\partial_x^k f(x,t)| = e^{-t} t^{x-1} |\log^k(t)| \leq |\log t|^k \varphi(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

donc $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et on peut dériver
Donc $\Gamma \in C^\infty([a,b])$ $\forall\, 0<a<b<\infty$
sous l'intégrale. (2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (IP) $\Rightarrow$ $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \Gamma(1)/x = 1/x$

3) Posons $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n 1_{]0,n]}(t)\log(t)$; il est clair que la suite $(f_n)_n$ tv SCV sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(t) = e^{-t}\log(t) 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ et croissante ie $|f_n(t)| \leq |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^+)$ en module

$$\left[\text{car } \underset{0\leq t\leq n}{|f_n(t)|} \leq (1-\tfrac{t}{n})^n |\log t| \leq \exp\left(n\log(1-\tfrac{t}{n})\right).|\log t| \leq e^{-t}|\log t|\right]$$

car $\underset{v>-1}{\log(1+v) \leq v}$

Donc on peut appliquer le th. de la CVD :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\log(t)\,dt = \int_0^\infty \lim_n \log t\,(1-\tfrac{t}{n})^n 1_{[0,n]}(t)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \log t\,(1-\tfrac{t}{n})^n\,dt$$

le changement de variable $u = (1-\frac{t}{n})$ nous donne $t = n(1-u)$

$$\int_0^n \log t\,(1-\tfrac{t}{n})^n\,dt = \int_0^1 u^n\, n\log(n(1-u))\,du$$

$$= \int_0^1 u^n\, n\left[\log(n) + \log(1-u)\right]du = \frac{n\log n}{n+1} + n\int_0^1 u^n\log(1-u)\,du$$

$$= \frac{n\log n}{n+1} - n\int_0^1 u^n.\sum_{k=1}^\infty \frac{u^k}{k}\,du = \frac{n\log n}{n+1} - n\sum_{k=1}^\infty \int_0^1 \frac{u^{k+n}}{k}\,du$$

car $\int_0^1 \left|\frac{u^{n+k}}{k}\right| du = \frac{1}{k(n+k+1)} \sim \frac{1}{k^2}$ t.q. Σ CV

Ainsi

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log t \, dt = \frac{n \log n}{n+1} - n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k+1)}$$

$$= \frac{n \log n}{n+1} - n \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(n+k+1)}$$

et nous avons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+n+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1}\right)\frac{1}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \dots - \frac{1}{N+n+1}\right)$$

$\boxed{n > N}$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{N} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \dots - \frac{1}{N} - \dots \frac{1}{N+n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} - \underbrace{\frac{1}{N+1} - \dots - \frac{1}{N+1+n}}_{n+1 \text{ termes}}\right)$$

donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)$$ et finalement

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log t \, dt = \frac{n \log n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma$$

Ainsi $\boxed{\Gamma'(1) = -\gamma}$

4) En outre pour $x>0$ une intégration par parties donne

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma'(x) + \Gamma(x)$$

Soit $\displaystyle\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x\,\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)} + \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$

Soit $\displaystyle\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\gamma$

ie $\boxed{\Gamma'(n+1) = n!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\gamma\right)}$

5) Avec le changement $s=\frac{t-x}{\sqrt{x}}$ mq $\forall x>0$: $\Gamma(x+1)=\frac{x^x}{e^x}\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{\varphi(x,s)}\,ds$

où $\varphi(x,s)=x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^x\,dt \qquad s=\frac{t-x}{\sqrt{x}} : \quad t=x+s\sqrt{x}, \quad dt=\sqrt{x}\,ds$$

$$=\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-(x+s\sqrt{x})}\,e^{x\log(x+s\sqrt{x})}\,\sqrt{x}\,ds$$

$$=\frac{x^x}{e^x}\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-sx+x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)}\,ds=\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{\varphi(x,s)}\,ds$$

6) Montrer que $\varphi(x,s)\leq\begin{cases}-s^2/2 & -\sqrt{x}<s\leq 0\\ \varphi(1,s) & \forall s>0,\ \forall x\geq 1\end{cases}$

• $\varphi(x,s)\leq -s^2/2 \quad \forall s\in\,]-\sqrt{x},0]$

$\Leftrightarrow x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}\leq-\frac{s^2}{2} \quad \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-\frac{s}{\sqrt{x}}\leq-\frac{s^2}{2x}$

$u=s/\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \log(1+u)-u\leq-\frac{u^2}{2}$, $u\in\,]-1,0]$

$\Leftrightarrow \underbrace{\log(1+u)-\left(u-\frac{u^2}{2}\right)}_{\varphi(u)}\leq 0$

$\varphi'(u)=\frac{1}{1+u}-1+u$

$=\frac{1+(u-1)(u+1)}{1+u}=\frac{u^2}{1+u}>0$

φ est croissante

u	-1		0
φ'		$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0

donc $\varphi\leq 0$ sur $]-1,0]$

Soit l'inégalité désirée

Remarque : $u-\frac{u^2}{2}$ p. ple du $DL_{2,0}$ de $\log(1+u)$: cette inégalité peut se montrer facilement avec $TL_{2,0}$ appliqué à $\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\varphi'''(\xi_u)$

• Pour la seconde inégalité :

$x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}\leq\log(1+s)-s$

$\forall s>0,\ x\geq 1$

soit $\psi(s)=x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-\log(1+s)+s(1-\sqrt{x})\leq 0$

$$\psi'(s)=\frac{x/\sqrt{x}}{1+s/\sqrt{x}}-\frac{1}{1+s}+1-\sqrt{x}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x}+s}+\frac{s}{1+s}-\sqrt{x}$$

$$=\frac{x(1+s)+s(s+\sqrt{x})-\sqrt{x}(1+s)(s+\sqrt{x})}{(1+s)(s+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{(1+s)(x-\sqrt{x}(s+\sqrt{x}))+s(s+\sqrt{x})}{(\ )(\ )}$$

$s\sqrt{x}\leftarrow$

$$=\frac{-(1+s)s\sqrt{x}+s(s+\sqrt{x})}{(\ )(\ )}=\frac{s[-\sqrt{x}(1+s)+s+\sqrt{x}]}{(\ )(\ )}$$

$$=\frac{s(-\sqrt{x}s+s)}{(\ )(\ )}$$

$$\boxed{\psi'(s)=\frac{s^2[1-\sqrt{x}]}{(1+s)(s+\sqrt{x})}}$$

soit $\psi'(s) = \dfrac{s^2(1-\sqrt{x})}{(1+s)(s+\sqrt{x})} \leq 0$ si $x > 1$, $\forall s > 0$

Donc pour $x > 1$ ψ est strictement decroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\psi(s) < \psi(0) = 0$ $\forall s > 0$ soit la seconde inégalité

(7) Ainsi pour $x \geq 1$: $|\varphi(x,s)| \leq g(s) = -\frac{s^2}{2} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(s) + \varphi(s,1)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)$
$\forall s \in \mathbb{R}$

soit $\left| e^{\varphi(x,s)} \right| \leq e^{-\frac{s^2}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(s) + \varphi(s)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)}$

$$\leq e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(s) + e^{\log(1+s) - s}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)$$

$$\leq e^{-s^2/2} \cdot + (1+s)e^{-s}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s) = g(s)$$

Il est clair que $g \in L^1(\mathbb{R})$ comme cette inégalité est vraie pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \geq 1$ on peut applique le theoreme de la CV Dominée pour écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{\varphi(x,s)} ds = \lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(x,s)} \mathbb{1}_{]-\sqrt{x},\infty[}(s)\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \to +\infty} e^{\varphi(x,s)\mathbb{1}\dots} ds \underset{DL}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \sqrt{2\pi}$$

En regroupant avec la question 5 il reste

$$\boxed{\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}}$$

c'est Stirling continu...

(8) Que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$ résulte du même raisonnement que celui fait en (3)

Et nous avons :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \underset{v=t/n}{=} \int_0^1 (1-v)^n (nv)^{x-1}\, n\,dv$$

$$= n^x \int_0^1 (1-v)^n v^{x-1}\, dv = n^x \int_0^1 (1-v)^n \left(\frac{v^x}{x}\right)' dv$$

$$= n^x \left\{ \left[(1-v)^n \frac{v^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 n(1-v)^{n-1}\frac{v^x}{x}\, dv \right\}$$

$$= n^x \left[n\int_0^1 (1-v)^{n-1}\frac{v^x}{x}\,dv\right] \overset{\text{idem}}{=} n^x n(n-1)\int_0^1 (1-v)^{n-2}\frac{v^{x+1}}{x(x+1)}\,dv$$

$$= \dots = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 v^{x+n-1} = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

soit $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$ Gauss

(9) Il faut montrer que $\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}}$

Or $$\log\left[x e^{\gamma x}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right] = \log(x) + \gamma x + \sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{x}{k}\right) - x\sum_1^n \frac{1}{k}$$

$$= -x\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma\right] + \sum_{k=1}^n \left[\log(k+x) - \log k\right] + \log x$$

$$= -x\left[\sum_1^n \frac{1}{k} - \gamma\right] + \log\left[\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!}\right] - \log n^x + \log n^x$$

$$= -x\Big[\underbrace{\sum_1^n\frac{1}{k} - \gamma - \log n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big] + \log\left[\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!\, n^x}\right] \sim \log\frac{1}{\Gamma(x)}$$

le résultat suit en prenant l'exponentielle

(10) $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Vu (9) $\frac{1}{\Gamma(x)} \overset{\lim}{=} x e^{\gamma x}\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}$

Donc $-\log\Gamma(x) \overset{\lim}{=} \log x + \gamma x + \sum_{k=1}^n \left[\log\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$

/la serie CV et :

Soit
(✫) $-\log\Gamma(x) = \log x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\log\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)}_{f_k(x)}$, $x>0$

comme $f_k'(x) = \frac{1/k}{1+x/k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{k(x+k)}$ $\sum_k f_k'$

on en déduit que $\|f_k'\|_{\infty,[0,a]} \leq \frac{a}{k^2}$: la série $\sum_k f_k'$ est donc NCV sur $[0,a]$ pour tout $a>0$, donc $\sum_k f_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\sum_k f_k)' = \sum_k f_k'$

On peut donc dériver (✫) :

$$\forall x>0 : \quad -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x}{k(k+x)}$$

$$\boxed{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)}}$$

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

En particulier si $x=1$ $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = -1 - \gamma + \underbrace{\sum_1^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{=1}$

On retrouve donc $\Gamma'(1) = \gamma$ vu en 3. par telescopage

11) On sait que Γ est C^∞ et qu'on peut dériver sous $\int$ donc si on remplace Γ, Γ' et Γ''

$$(\log(\Gamma))'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

on voit que le numérateur est positif par Cauchy-Schwarz : $(\int fg)^2 \leq \int f^2 \int g^2$ avec $f(t) = \log t \, t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}$; $g(t) = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \in L^2(\mathbb{R}^+)$

Ainsi $\log\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par la réciproque : on a $f(tx+(1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}$ $\forall x>0$ $\forall y>0$ $\forall t\in[0,1]$.

En particulier on peut écrire :

$f(u+n+1) = u(u+1)\dots(u+n) f(u)$ $u = tx+(1-t)y$

$u+n+1 = t(x+n+1)+(1-t)(y+n+1)$

$f(u+n+1) \leq f(x+n+1)^t f(y+n+1)^{1-t}$

soit $u(u+1)\dots(u+n+1) f(u) \leq f(x+n+1)^t f(y+n+1)^{1-t}$

$\leq (x(x+1)\dots(x+n)f(x))^t (y(y+1)\dots(y+n)f(y))^{1-t}$

$$\frac{u(u+1)\dots(u+n)\,f(u)}{n^u \cdot n!} \leq \frac{[x(x+1)\dots(x+n)f(x)]^t\;[y(y+1)\dots(y+n)f(y)]^{1-t}}{(n^x n!)^t \quad (n^y n!)^{1-t}}$$

on fait tendre n vers $+\infty$ avec la formule (8) de Gauss :

$$\frac{f(tx+(1-t)y)}{\Gamma(tx+(1-t)y)} \leq \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^t \left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-t} \qquad (u = tx + (1-t)y \dots)$$

la fonction f/Γ est donc log convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, mais elle est aussi 1-périodique donc bornée donc $\log f/\Gamma$ est à la fois convexe et bornée elle ne peut être que constante (bon exercice)

et comme $f(1) = \Gamma(1) = 1 \Rightarrow f = \Gamma$ CQFD !