Université Paul Sabatier, 1er novembre 2010 Master MEI

☯ ☢ ☯ MEI M2 –Révisions d'Analyse. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *(séries de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 2π-périodique ; si tous ses coefficients de Fourier sont nuls, montrer que f est identiquement nulle.*

Exercice 2. *(séries de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale é $\sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$.*

(1) *Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?*

(2) *Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$. montrer que $a_n = 0(n^{-3/2})$.*

(3) *Montrer que f est développable en série de Fourier.*

Exercice 3. *(intégrales à paramètres). Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{nq+p}$.*

Exercice 4. *(intégrales à paramétres). Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1-t^2}dt$.*

Exercice 5. *Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-m}\cos(m^2x)$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas développable en série entiére à l'origine.*

Exercice 6. *Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2tx)dt$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et est développable en série entiére à l'origine.*

Exercice 7. *(Autour du théorème des moments de Hausdorff)*

(1) *Soit $f \in C([a, b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, montrer que f est identiquement nulle.*

(2) *Si $f(x) = e^{-x^{1/4}}\sin(x^{1/4})$, montrer que $I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ oé $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$.*

(3) *En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. (pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$...).*

Exercice 8. *(fonctions de plusieurs variables) On note $\varphi : A \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \varphi(A) := \det(A) \in M_d(\mathbb{C})$ l'application déterminant.*

(1) *Montrer que $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(M_d(\mathbb{C}))$.*

(2) *é l'aide de la comatrice, calculer pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, d\}^2$ et $A \in GL_d(\mathbb{C})$ la dérivée partielle $\frac{\partial\varphi(A)}{\partial x_{i,j}}$ pour en déduire $d\varphi(A)$.*

(3) *Une autre méthode pour calculer $d\varphi(A)$:*
   - *Calculer $d\varphi(I_d)$.*
   - *En déduire $d\varphi(A)$ pour $A \in GL_d(\mathbb{C})$.*
   - *Conclure via la densité de l'ouvert $GL_d(\mathbb{C})$.*

Exercice 9. *(intégration) Convergence et calcul de* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2011(t+t^{-1})}\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Exercice 10. *(intégration) Convergence et convergence absolue de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^3-t)dt$.

Exercice 11. *Soit* $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+3x^2+\ldots+2009x^{2010}}$, *que vaut* $f^{(2010)}(0)$ *? (commencez par écrire plus simplement* f *pour en déduire facilement un développement limité é l'ordre* 2010 *é l'origine...).*

Exercice 12. *(développements limités) Calculer d'au moins quatre manières différentes le développement limité à l'ordre* 3 *à l'origine de la fonction tangente*

Exercice 13. *(développements limités) Montrer que*

$$\lim_{x\to 2_+}\left(2^x+3^x-12\right)^{\tan(\pi x/4)}=\exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2)+9\log(3)\right)\right],\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{t}})-\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2-\mathrm{t}})}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t^2}-\frac{t^6}{6}\log^2(t)}=\frac{e-1}{2}.$$

Exercice 14. *(continuité et dérivation) On considère l'application* $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x)=\begin{cases}1/q, & si\ \ x=\frac{p}{q},\ p\wedge q=1,\\ 1, & si\ \ x=0,\\ 0, & si\ \ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(1) *Montrer que* f *est* 1*-périodique.*
(2) *Montrer que* f *est discontinue sur* $\mathbb{Q}$.
(3) *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
(4) *Montrer que* f *est nulle part dérivable.*

Exercice 15. *(dérivations et séries) Existe-t-il* f *deux fois continuement dérivable au voisinage de l'origine telle que* $\sum_{n\geq 1} f(n^{-1})$ *converge mais pas absolument ?*

1er novembre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr
http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html