M2 CAPES, 2010/2011
PRÉPARATION À L'ÉPREUVE D'EXERCICES
THÈME : EQUATIONS, INÉQUATIONS

PATRICE LASSÈRE, 15 AVRIL 2011

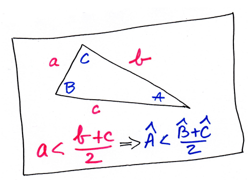
1. Les exercices

Exercice 1. *Un jour de très grande chaleur nous avons quatre couples, les Flouttard, Vagnigni, Jacques et GéGé qui boivent 44 bouteilles de jus de fruit. Claudie en boit 2, Janine 3, Gertrude 4 et Fabienne 5. Monsieur Flouttard en boit autant que sa femme alors que Monsieur Vagnigni en boit le double (de la sienne), Monsieur Jacques le triple et Monsieur GéGé le quadruple. Retrouver les noms et prenoms des épouses.*

Exercice 2. (1) *Déterminer la boule (euclidienne) de* $\mathbb{R}^3$ *passant par les quatre points* $A_1 = (1,0,0), A_2 = (1,1,0), A_3 = (1,1,1), A_4 = (0,1,1)$.
(2) *Trois points suffisent-ils ?*
(3) *En déduire le fonctionnement du système GPS de votre téléphone portable.*

Exercice 3. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* $p(x) = x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ *par le polynôme* $x^3 - x$.

Exercice 4. *Si le coté d'un triangle est plus petit que la moyenne arithmétique des deux autres, montrer que l'angle opposé (à ce premier coté) est plus petit que la moyenne arithmétique des deux autres.*



Exercice 5. *Soient* a, b, c, d *quatre réels dans* $]0,1[$. *Montrer que que les quatre produits*

$$4a(1-b), 4b(1-c), 4c(1-d), 4d(1-a)$$

ne peuvent tous être supérieur ou égal à 1.

2. Les questions

(1) Développer l'exercice 1, questions 1 et 3.
(2) Proposer d'autres exercices.
(3) Classe de quatrième/troisième : étudier l'existence et la construction de cercles passant par trois points dans le plan.
(4) Classe de troisième : étudier l'existence et la construction de cercles passant par trois points dans l'espace.

2.1. Le corrigé des l'exercices.

Corrigé de l'exercice 1 : Désignons par a (respectivement b, c, d) le nombre de bouteilles consommées par madame Flouttard (respectivement Vagnigni, Jacques, GéGé) nous avons donc

$$\begin{cases} a + b + c + d = 14, \\ a + 2b + 3c + 4d = 30. \end{cases}$$

La différence entre ces deux équations donne $b + 2c + 3d = 16$. b et d doivent donc être simultanément pairs ou simultanément impairs et $c = 8-(b+3c)/2$. Les variables étant entières, on trouve rapidement les seules solutions $(b, c, d) = (3, -1, 5), (5, 1, 3), (2, 1, 4)$ et $(4, 3, 2)$. En reportant dans les deux premières seul le dernier cas est admissible et l'unique solution est $(a, b, c, d) = (5, 4, 3, 2)$. Ce qui correspond aux épouses suivantes : Fabienne Flouttard, Gertrude Vagnigni, Janine Jacques, Claudie GéGé. ■

Corrigé de l'exercice 2 : Désignons par $r(x)$ le reste de cette division. C'est un polynôme de degré 2 vérifiant

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} = q(x)(x^3 - x) + r(x) = q(x)(x^3 - x) + ax^2 + bx + c.$$

Faisons successivement $x = 0, x = 1, x = -1$ il vient

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ a - b + c = -5 \end{cases}$$

On trouve immédiatement $r(x) = 5x$. ■

Corrigé de l'exercice 3 :

(1) Si une telle boule $B((a, b, c), r)$ existe, on aura

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 = r^2 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = r^2 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = r^2 \end{cases}$$

Soit si l'on soustrait la première équation au trois autres

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ - 2b + 1 = 0 \\ - 2b + 1 - 2c + 1 = 0 \\ 2a - 1 - 2b + 1 - 2c + 1 = 0 \end{cases}$$

Maintenant les trois dernières équations forment un système linéaire d'inconnues a, b, c admettant pour unique solution $(a, b, c) = (1/2, 1/2, 1/2)$. On reporte alors dans la première équation pour trouver la valeur du rayon r : $1/4 + 1/4 + 1/4 = r^2$ soit $r = \sqrt{3}/2$.

(2) Certainement pas, il est facile de voir qu'avec une seulement trois équations on va trouver une infinité de boules. Quel est l'ensemble décrit par leur centres ?

(3) La méthode pour résoudre ce petit exercice est à la base du fonctionnement du système GPS. Supposons que vous vouliez connaître votre position exacte (x, y, z). Votre téléphone est en permanence en contact avec des satellites géostationnaires , disons au moins 4 (en fait une vingtaine) dont on connait la position précise $S_i = (a_i, b_i, c_i),\ 1 \le i \le 4$.

Ce contact permet à un logiciel dans votre téléphone de calculer au temps t_0 les distances $d_1, \dots, d_4$ vous séparant de ces 4 satellites. On a donc les équations

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} (x-a_1)^2 & + & (y-b_1)^2 & + & (z-c_1)^2 & = & d_1^2 \\ (x-a_2)^2 & + & (y-b_2)^2 & + & (z-c_2)^2 & = & d_2^2 \\ (x-a_3)^2 & + & (y-b_3)^2 & + & (z-c_3)^2 & = & d_3^2 \\ (x-a_4)^2 & + & (y-b_4)^2 & + & (z-c_4)^2 & = & d_4^2 \end{cases}$$

où les inconnues sont vos coordonnées (x, y, z). Il suffit alors comme dans l'exercice précédent de soustraire la première équation aux trois autres ce qui a le bon goût de faire disparaitre les termes quadratiques (i.e. en x^2, y^2, z^2). ces trois nouvelles équations constituent maintenant un système linéaire de trois équations à trois inconnues facile à résoudre. Il est bien entendu possible que la position de certains satellites et/ou une erreur de calculs dans les données d_i ne permette pas de résoudre le système (ou bien donne une solution aberrante : vous êtes au centre de la terre ou dans une autre galaxie...) dans ce cas il ne faut pas oublier que vous êtes en contact avec bien plus de 4 satellites et un meilleur choix parmi les satellites va donner la réponse désirée (tout ceci se fait bien entendu en une fraction de seconde...). ■

Corrigé de l'exercice 4 : Comme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, montrer que $\hat{A} < (\hat{B} + \hat{C})/2$ équivaut à $\hat{A} < (180° - \hat{A})/2$, soit $\hat{A} < 60°$. Mais $\hat{A} < 60°$ équivaut à $\cos(\hat{A}) > 1/2$, ce qui peut nous faire penser à utiliser la loi des cosinus.

Par hypothèse, $b + c > 2a$. En élevant au carré les deux cotés de cette inégalité, et en appliquant la loi des cosinus on tombe sur $b^2 + c^2 > 4a^2 = 4(b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}))$ ou encore $3b^2 + 3c^2 - 2bc < 8bc\cos(\hat{A})$. On soustrait alors $4bc$ aux deux membres de cette inégalité :

$$0 \leq 3(b-c)^2 = 3b^2 + 3c^2 - 6bc < 4bc(2\cos(\hat{A}) - 1),$$

Donc $2\cos(\hat{A}) - 1 > 0$, soit $\cos(\hat{A}) < 1/2$. CQFD. ■

Corrigé de l'exercice 5 : Il est suffisant de montrer que $4a(1-b)4b(1-c)4c(1-d)4d(1-a) < 1$. Pour cela, si on étudie les extrema de $t \mapsto t(1-t)$ pour $t \in]0, 1[$, on vérifie facilement que le maximum $1/2$ est atteint en $t = 1/2$. Par conséquent $4a(1-a)4b(1-b)4c(1-c)4d(1-d) \leq 1$ pour tous $0 < a, b, c, d < 1$. En réordonnant les termes on trouve $4a(1-b)4b(1-c)4c(1-d)4d(1-a) \leq 1$ pour tous $0 < a, b, c, d < 1$ avec égalité si et seulement si $a = b = c = d = 1/2$. C.Q.F.D. ■

◕ 15 avril 2011 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl :lassere@math.ups-tlse.fr
Page INP : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/