# M2 CAPES, 2010/2011
# PRÉPARATION À L'ÉPREUVE D'EXERCICES
# THÈME : SUITES

PATRICE LASSÈRE, 21 AVRIL 2011

## 1. L'exercice

Soit $P(x) = x^3 - x + 1$.

(1) Montrer que $P$ admet une unique racine réelle que l'on notera $\alpha$. Vérifier que $\alpha < -1$.
(2) Montrer que $P$ admet deux autre racines $\beta$ et $\gamma$ vérifiant $\beta = \overline{\gamma}$.
(3) Montrer que $|\beta| < 1$.
(4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Calculer $u_0, u_1$ et $u_2$.
(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = 0$.
(6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
(7) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} |\alpha|^n$.
(8) Déterminer (si elle existe) $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi\alpha^n)$.

## 2. Exercices supplémentaires

**Exercice 1.** *Pour $n \geq 1$ on définit $a_n$ comme le plus petit entier tel que*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1.$$

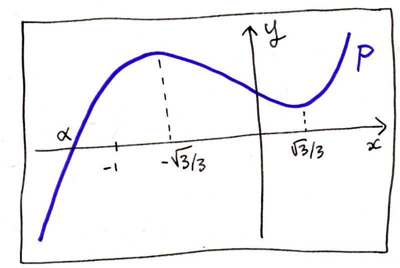
(1) *Montrer que $a_n$ est bien défini et que pour tout $n \geq 2$ : $2n - 1 < a_n < 3n - 2$.*
(2) *Montrer que si la suite $(a_n/n)_n$ converge, alors $2 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq 3$.*
(3) *Montrer successivement*

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n},$$
$$1 - \frac{1}{n} < \log\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq 1.$$

(4) *En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = e$.*

### 2.1. Le corrigé de l'exercice.

(1) On a $P'(x) = 3x^2 - 1$, $P$ est donc (voir le petit dessin ci-contre) croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}/3]$ puis décroissante sur $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ et enfin croissante sur $]\sqrt{3}/3, +\infty[$. Comme $P(\sqrt{3}/3) = 1 - 2\sqrt{3}/9 > 0$, $P$ ne s'annule pas sur $]-\sqrt{3}/3, +\infty[$. $P$ admet donc une unique racine $\alpha \in ]-\infty, -\sqrt{3}/3]$, et comme $P(-1) = 1 > 0$ on aura $\alpha < -1$.




(2) $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ où $Q$ est de degré 2. Les autres racines de $P$ sont celles de $Q$ donc au nombre de 2 : $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Elles sont conjuguées car $P$ est à coefficients réels, en effet $P(\beta) = 0$ implique ($P$ est à coefficients réels) que $\overline{P(\beta)} = P(\overline{\beta}) = 0$ et $\beta \neq \overline{\beta}$ donne $\gamma = \overline{\beta}$.

(3) On peut exprimer $\beta$ et $\gamma$ en fonction de $\alpha$ mais ce n'est pas utile. Observons plutôt la factorisation qui se déduit des questions précédentes $P(x) = x^3 - x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. En identifiant les termes constants on obtient $\alpha\beta\gamma = \alpha|\beta|^2 = -1$ soit $|\beta|^2 = -1/\alpha$. Comme $\alpha < -1$ on a bien $|\beta| < 1$.

(4) $u_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$. En identifiant les coefficients de $x$ et $x^2$ dans $P(x) = x^3 - x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ on trouve

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$$

donc $u_1 = 0$ et

$$u_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 2.$$

(5) $P(\alpha) = \alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ implique $\alpha^{n+3} - \alpha^{n+1} + \alpha^n = 0$. On a la même égalité avec $\beta$ et $\gamma$. En les additionnant on obtient $u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = 0$.

(6) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0, 1$ et 2. Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 2$. Alors $u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2} \in \mathbb{Z}$, d'où la proprité au rang $n+1$. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

(7) On a vu dans la première question que $|\alpha| > 1$, par conséquent $\lim_{n\to+\infty} |\alpha^n| = +\infty$.

(8) Comme $\lim_{n\to+\infty} |\alpha^n| = +\infty$ l'existence même de la limite $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi\alpha^n)$ n'est pas claire. Cependant, comme $u_n \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\pi\alpha^n) = \sin(\pi(u_n - \beta^n - \gamma^n)) = (-1)^{u_n+1}\sin(\pi(\beta^n + \gamma^n)).$$

Mais, d'après (3) : $|\gamma^n + \beta^n| \leq |\beta|^n + |\gamma|^n = 2|\beta|^n$ et $\lim_n |\beta|^n = 0$ (car $|\beta| < 1$). La suite $(\pi(\beta^n + \gamma^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite réelle (car $\gamma^n = \overline{\beta}^n$) qui tends vers 0. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi\alpha^n) = 0$. ■

**Corrigé de l'exercice 2 :**

(1) Pour $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1,$$

et par une facile récurrence on montrer que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} < 1.$$

Donc $2n - 1 < a_n \leq 3n - 2$ et, si la suite $(a_n/n)_n$ converge ce sera vers une limite $l$ vérifiant $2 \leq l \leq 3$.

(2) De la définition de $a_n$ on a

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

En comparant avec l'intégrale sur $[n, a_n]$ de $1/t$ on a aussi

$$1 - \frac{1}{n} < \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} < \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1.$$

On a donc

$$1 - \frac{1}{n} < \log\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq 1,$$

i.e.

$$\exp\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{a_n}{n} < e.$$

Par encadrement, la suite est bien convergente et $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = e$. ■

**Exercice 2.** *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ *vérifiant* $\sqrt{b} < a < 2\sqrt{b}$*. On considère la suite définie par récurrence par*

$$x_0 \geq 0, \quad x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{x_n + a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Montrer que la suite* $(x_n)_n$ *converge et préciser sa limite.*

**Corrigé de l'exercice :** $x_0 \geq 0, a > 0, b > 0$ assurent que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x_n)_n$ converge, sa limite $l$ vérifie alors $l = \frac{al+b}{l+a}$ soit $l^2 = b$ puis $(l \geq 0)$ $l = \sqrt{b}$. Alors

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{b}| &= \left|\frac{ax_n + b}{x_n + a}\right| \\ &= \frac{a - \sqrt{b}}{x_n + a} \end{aligned}$$

■

◕ 21 avril 2011 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl :lassere@math.ups-tlse.fr