M2 CAPES, 2010/2011
PRÉPARATION À L'ÉPREUVE D'EXERCICES
THÈME : LOIS BINOMIALE, LOIS CONTINUES

PATRICE LASSÈRE, 21 AVRIL 2011

1. L'exercice

Exercice 1.

(1) *Soit* $a \geq 4$. *Quelle est la probabilité* $f(a)$ *que l'équation quadratique* $x^2+bx+c=0$ *admette des racines réelles si les coefficients* b *et* c *sont uniformément distribués sur* $[-a,a]$ *?*

(2) *Déterminer* $\lim_{a\to+\infty} f(a)$. *Comment pourriez vous interpréter la limite précédente ?*

(3) *A votre avis quelle va être la limite* $\lim_{a\to 0_+} f(a)$ *? Calculer* $f(a)$ *pour* $a \leq 4$ *et calculer la limite.*

Exercice 2. *On jette une pièce non équilibrée* n *fois* ($p = P($*obtenir pile*$)$). *L'objectif de l'exercice est de calculer la probabilité* p_n *d'obtenir un nombre pair de piles.*

(1) *Soit* X *la variable aléatoire « nombre de piles obtenus ». Montrer que* X *suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire une expression de* p_n *sous la forme d'une somme.*

(2) *En considérant les quantités* $(x+y)^n$ *et* $(x-y)^n$ *trouver une expression plus simple pour* $\sum_{0\leq k\equiv 0(2)\leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. *En déduire la valeur de* p_n.

(3) *(Autre méthode) Montrer que* $p_0 = 1$ *et, pour* $n \geq 1$ $p_n = p(1-p_{n-1}) + (1-p)p_{n-1}$. *En déduire* p_n.

Exercice 3. *On choisit au hasard un nombre entre 0 et 9999 (bornes comprises). Quelle est la probabilité*

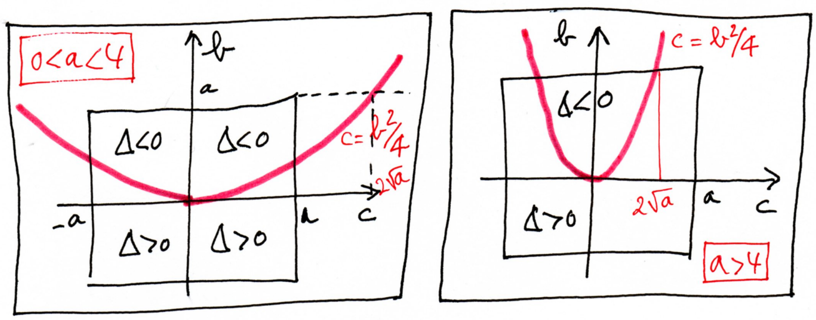
(1) *qu'il contienne deux fois le chiffre 3 ? (rep : 0,0486)*

(2) *qu'il contiennent deux fois le chiffre 0 ? (rep : 0,0252)*

1.1. **Le corrigé des l'exercices.**

Corrigé de l'exercice 1 :

(1) Le polynôme $p(x) = x^2 + bx + c$ admet des racines réelles si et seulement si $b^2 - 4c \geq 0$. C'est, dans le plan O_{bc}, la région située sous la parabole $c = b^2/4$. Les paramètres (b, c) étant uniformément distribués dans le carré $[-a, a] \times [-a, a]$ il s'agit donc de déterminer l'aire de la portion de surface du carré qui se trouve sous la parabole. Suivant les valeurs du paramètre réel a deux cas sont à envisager suivant que la parabole coupe la droite $b = a$ dans ou à l'extérieur du carré. Ces deux courbes se rencontrent en $(\pm 2\sqrt{a}, a)$. Ces points se trouvent dans le pavé, si et seulement si $2\sqrt{a} \leq a$ soit $a \leq 4$. Ces deux possibilités sont illustrées ci-dessous



Donc, pour $0 < a \leq 4$ l'aire vaut

$$2a^2 + 2a(a - 2\sqrt{a}) + 2\int_0^a \frac{t^2}{4}dt = 2a^2 + 2a(a - 2\sqrt{a}) + 2\frac{a^3}{12}dt =$$

La probabilité cherchée est donc

$$f(a) = \frac{4a^2 - 23a^{3/2}/6}{4a^2} = 1 - \frac{23}{24\sqrt{a}}.$$

Il est en fait plus rapide de calculer la portion d'aire au dessus de la parabole qui vaut

$$2\int_0^a 2\sqrt{t}dt = \frac{8a^{3/2}}{3}.$$

(2) Vu ce qui précède on a clairement $\lim_{a\to+\infty} f(a) = 1$. On peut interpréter ce résultat en disant que la probabilité qu'un polynôme unitaire $p(x) = x^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels admette des racines réelles vaut 1. Bien entendu c'est juste une interprétation.

(3) Ici, $a \leq 4$. On se trouve maintenant dans la situation de la seconde figure. Lorsque a tends vers zéro, le polynôme $q(b) = b^2/4$ vit entre 0 et $a^2/4$ donc l'aire entre q et l'axe des "c" tends vers 0 du coup la probabilité doit tendre vers 1/2. C'est ce que l'on vérifie immédiatement par

$$f(a)\frac{2a^2 + 2\int_0^a t^2dt/4}{4a^2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{24}.$$

■

Corrigé de l'exercice 2 :

(1) On répète de manière indépendante n fois une épreuve de Bernoulli (succès/échec), il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli et on sait alors que la variable aléatoire X « nombre de succès au cours des n épreuves » suit une loi binomiale $B(n,p)$. Par conséquent

$$p_n = P(X=0) + P(x=2) + \cdots + P(X = 2E(n/2)) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{2k}{n} p^{2k}(1-p)^{n-2k}.$$

(2) Avec la formule du binôme pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x+y)^n + (-x+y)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{l}{n} x^l y^{n-l} + \sum_{l=0}^{n} \binom{l}{n} (-1)^l x^l y^{n-l} = 2 \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{2k}{n} x^{2k} y^{n-2k}.$$

$x = p$ et $y = 1-p$ donnent

$$1 + (1-2p)^n = 2 \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{2k}{n} p^{2k}(1-p)^{n-2k} = 2p_n \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}.$$

(3) Moins sportivement, la formule des probabilités totales donne pour $n \geq 2$:

$$p_n = p(1-p_{n-1}) + (1-p)p_{n-1} = p + (1-2p)p_{n-1}.$$

Il n'est alors pas très difficile d'en déduire la valeur de p_n. ■

◑ 21 avril 2011 ◑ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl :lassere@math.ups-tlse.fr
Page INP : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/