M2 CAPES, 2010/2011
PRÉPARATION À L'ÉPREUVE D'EXERCICES
THÈME : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PATRICE LASSÈRE, 21 AVRIL 2011

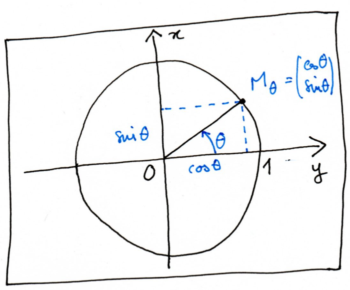
1. L'exercice

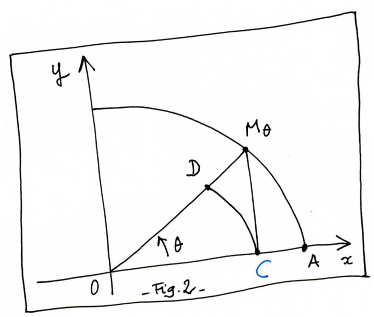
L'objectif de cet exercice est – avec l'unique bagage du lycée – de calculer les dérivées des fonctions trigonométriques usuelles sin et cos et d'en déduire l'existence et la forme des solutions de l'équation différentielle a coefficients constants $y'' + k^2 y = 0$.

Commençons par définir trigonométriquement les fonctions sin et cos. Pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, on désigne par M_θ l'unique point du cercle unité $C(O, 1)$ vérifiant

$$\angle(O_x, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta.$$

$M_\theta = (x_\theta, y_\theta)$ étant ainsi défini on pose $x_\theta = \cos(\theta), y_\theta = \sin(\theta)$. On prolonge ensuite ces deux fonctions sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.





En particulier $\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$.

(1) (a) Montrer que l'on peut supposer $0 < \theta < \pi/2$.

(b) Soit $0 < \theta < \pi/2$. L'arc de cercle de rayon OC où $C = (\cos(\theta), 0)$ coupe OM_θ en D (voir la figure 2). En observant que l'aire du secteur angulaire$(OCD) \leq$ l'aire du secteur triangulaire$(OCB) \leq$ l'aire du secteur angulaire (OAB), montrer que pour tout $0 < \theta < \pi/2$

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

(c) En déduire que la fonction sinus est dérivable en $\theta = 0$ et $\sin'(0) = 1$.

(d) En observant l'égalité $\dfrac{\cos(\theta) - 1}{\theta} = \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} \cdot \dfrac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$, en déduire que la fonction cosinus est dérivable en $\theta = 0$ et $cos'(0) = 0$.

(e) Montrer que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$. Faire de même pour cos.

(2) (a) Montrer que les fonctions de la forme $t \mapsto \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$ (α et β sont deux constantes réelles) sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

(b) Soit f une solution de l'équation différentielle $y''+y = 0$. Posons $g_1(t) := f(t)\cos(t) - f'(t)\sin(t), \quad g_2(t) := f(t)\sin(t) + f'(t)\cos(t)$. Montrer que $g_1' = g_2' \equiv 0$.

(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ puis de l'équation différentielle $y'' + k^2 y = 0,\ (k > 0)$.

◕ 21 avril 2011 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl :lassere@math.ups-tlse.fr