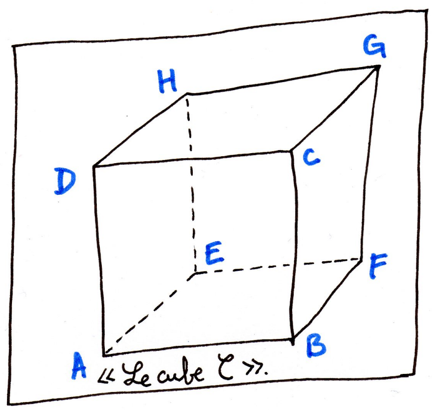
M2 CAPES, 2010/2011
PRÉPARATION À L'ÉPREUVE D'EXERCICES
THÈME : DÉNOMBREMENT/ÉQUIPROBABILITÉ

PATRICE LASSÈRE, 15 AVRIL 2011

1. L'exercice

Un point se déplace aléatoirement d'un sommet d'un cube $\mathscr{C}$ à un autre. A chaque station, il choisit la station suivante parmi les trois sommets adjacents au sommet où il se trouve. Le choix s'effectue de façon équiprobable et indépendante du trajet déjà effectué.



(1) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer le nombre T_n de trajets possibles en $2n$ étapes (on rappelle que le point part de A).

(2) Soit $n \geq 3$, montrer qu'à la n-ième station le point se trouvera sur les sommets A, C, F, H si n est pair et D, B, E, G si n est impair.

(3) On note S_n le nombre de trajets en $2n$ étapes tels que le point se retrouve en A à l'issue de la $2n$-ième étape. Par convention, $S_0 = 1$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+1} = S_n + 2 \cdot 3^{2n}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + \dfrac{3^{2n} - 1}{4}$.

(4) Quelle est la probabilité pour que le point soit en A à l'issue de la $2n$-ième étape ?

(5) Quelle est la probabilité pour que le point ne soit jamais[1] repassé en A à l'issue de la $2n$-ième étape ? En déduire le nombre de tels chemins.

(6) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la probabilité p_n pour que le premier retour en A s'effectue à l'issue de la $2n$-ième étape.

(7) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$?

---

1. Vous pouvez appliquer la formules des probabilités composées : si $P\big(\cap_{1\leq k\leq n} V_k\big) > 0$ alors $P\big(\cap_{1\leq k\leq n} V_k\big) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \dots P(V_n/V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1})$. Au niveau terminale : démontrer cette formule à partir de la formule de Bayes.

2. Les questions

(1) Développer la troisième question.

(2) Pour des classes de première : sachant que $p_1 = 1/3$ et $p_n = \frac{12 \cdot 7^{n-2}}{9^n}$ pour $n \geq 2$, résoudre la question 7.

(3) Pour des classes de sixième/cinquième : élaborer une méthode pour déterminer tous les chemins possibles en trois mouvements. Analyser les résultats. Conclusion ?

(4) Terminale : démontrer la formule des probabilités composées.

Exercice 1. *(exercice bonus).*

(1) *Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres complexes de module 1 vérifiant $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |1+z|$? le représenter graphiquement.*

(2) *Soit $\mathscr{Z}$ l'ensemble des racines de l'équation $z^{2010} - 1 = 0$; on choisit au hasard (les tirages sont équiprobables) une racine $u \in \mathscr{Z}$. Quelle est la probabilité que $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |1+u|$?*

3. Le corrigé de l'exercice

(1) Chaque sommet est relié à trois autre sommets : le nombre T_n de trajets possibles en $2n$ étapes est donc égal à $T_n = 3^{2n}$.

(2) Après le premier mouvement on se trouve parmi l'un des sommets $\{B, D, E\}$, après le second $\{A, C, F, H\}$ au troisième $\{B, D, E, G\}$ donc $\{A, C, F, H\}$ pour le quatrième mouvement : on se retrouve donc dans la même situation qu'après le second mouvement. Et ainsi de suite, la boucle est bouclée...

(3) (a) On peut diviser un trajet se terminant en A au bout de $2n + 2$ mouvements en deux ensembles disjoints : ceux qui passent par A au $2n$-ième mouvement et les autres.

– Si on se trouve au sommet A à la $2n$-ième étape (S_n tels chemins) il reste trois possibilités pour se retrouver en A à la $2n + 2$-ième étape : ABA, ADA, AEA. Ce qui nous donne $3S_n$ chemins.

– Maintenant si au $2n$-ième mouvement nous ne sommes pas sur le sommet A (il y a donc $3^{2n} - S_n$ tels chemins de longueur $2n$), vu la question (2) nous sommes soit en C soit en F soit en H et dans chacun de ces cas il existe deux possibilités ($HDA, HEA, FBA, FEA, CBA, CDA$) d'atteindre le sommet A à la $2n + 2$-ième étape . Nous avons donc $2(3^{2n} - S_n)$ tels chemins.

Ainsi $S_{n+1} = 3S_n + 2(3^{2n} - S_n) = S_n + 2 \cdot 3^{2n}$.

(b) On somme pour $0 \le k \le n - 1$ la formule précédente, après simplification il reste

$$S_n = S_0 + 2(3^0 + 3^2 + \cdots + 3^{2(n-1)}) = 1 + 2\frac{3^{2n} - 1}{9 - 1} = 1 + \frac{3^{2n} - 1}{4}.$$

(4) Avec les notations précédentes $p_n = \dfrac{1 + \frac{3^{2n}-1}{4}}{3^{2n}}$.

(5) On note V_n l'évènement $\{$le point n'est pas en A à l'instant $2n\}$. On cherche donc la probabilité de $\cap_{1\le k\le n} V_k$. Par la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P\big(\cap_{1\le k\le n} V_k\big) &= P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \dots P(V_n/V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \\ &= P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \dots P(V_k/V_{k-1}) \dots P(V_n/V_{n-1}) \\ &= P(V_1) \cdot \big(P(V_2/V_1)\big)^{n-1} \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité justifiée par le fait que la position du point à l'instant k ne dépend que de sa position à l'instant $k - 1$ (propriété de Markov)

$P(V_1) = 6/9$ se calcule facilement en dénombrant les cas favorables parmi les possibles. On calcule de même $P(V_2/V_1)$. Pour cela il suffit de dénombrer : V_1 étant réalisé, après le second mouvement nous sommes en H, C ou F. Si on se trouve en H on a neuf possibilités pour deux sauts : $HGF, HGC, HGH, HDA, HDH, HDC, HEF, HEA, HEH$. Donc sept chemins ne passant pas par le sommet A. Il est est de même il si après le second mouvement on se trouve en Cou F. Il y a donc 21 chemins favorables sur les 27 possibles : $P(V_2/V_1) = 21/27 = 7/9$. Finalement, la probabilité cherchée est

$$P\big(\cap_{1\le k\le n} V_k\big) = P(V_1) \cdot \big(P(V_2/V_1)\big)^{n-1} = \frac{6}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{6 \cdot 7^{n-1}}{3^{2n}}.$$

Les chemins étant équiprobables, le nombre de tels chemins est $3^{2n} P\big(\cap_{1\le k\le n} V_k\big) = 6 \cdot 7^{n-1}$.

(6) Avec les notations précédentes, on a $p_1 = P(V_1^c) = 1/3$ et pour $n \ge 2$

$$\begin{aligned} p_n &= P\big(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap V_n^c\big) \\ &= P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \dots P(V_k/V_{k-1}) \dots P(V_{n-1}/V_{n-2}) P(V_n^c/V_{n-1}) \\ &= \frac{6}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} \frac{2}{9} = \frac{12 \cdot 7^{n-2}}{9^n} \end{aligned}$$

(7) Sauf erreur, on trouve :

$$\begin{aligned} p_1+p_2+\cdots+p_n &= \frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{n}\frac{12\cdot 7^{n-2}}{9^n} = \frac{1}{3}+\frac{12}{9^2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{7}{9}\right)^k \\ &= \frac{1}{3}+\frac{12}{81}\cdot\frac{1-(7/9)^{n-1}}{1-7/9} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(1-(7/9)^{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1. \end{aligned}$$

■

Solution de l'exercice Bonus :

(1) Si z est de module 1, on l'écrit $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ donc $\sqrt{2+\sqrt{3}}\leq|1+z|$ équivaut à $2+\sqrt{3}\leq |1+u|^2=(1+\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)$ soit $\cos(\theta)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\mathscr{E}$ est donc l'arc $\{e^{i\theta},\ \theta\in[-\pi/6,\pi/6]\}$.

(2) Le tirage étant équiprobable, il nous faut dénombrer les racines 2011-ièmes de l'unité $e^{2ik\pi/2011}$, $(0\leq k\leq 2010)$ qui sont dans $\mathscr{E}$. Comme $0\leq\frac{2k\pi}{2011}\leq\frac{\pi}{6}$ équivaut à $0\leq k\leq\frac{2010}{12}=167.5$. Les racines étant disposées symétriquement de part et d'autre de l'axe O_x nous avons $167+167+1=335$ racines dans $\mathscr{E}$ (ne pas oublier 1 !). La probabilité demandée est donc $\frac{335}{2010}\sim 0.1666...$

☯ 15 avril 2011 ☯ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl :lassere@math.ups-tlse.fr
Page INP : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/