☯ ☢ ☯ **AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES** ☯ ☢ ☯

Intégration, Dérivation & Applications – Samedi 11 septembre 2010.

1. Encore un peu d'intégration

Exercice 1. *(☕) Montrer que* $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\sin(x)}dx > \pi e^{\pi/2}$.

Exercice 2. *1)* ***(irrationalité de*** π***)*** *On suppose que* $\pi = p/q \in \mathbb{Q}$ *et on pose* $I_n = \int_0^{\pi} \left[x(p-qx)\right]^n dx$. *Montrer que* $I_0 = 2,\ I_1 = 4q,\ I_n = 2n(2n-1)qI_{n-1} - n(n-1)p^2 I_{n-2}$ *(attention ! cette égalité purement calculatoire est assez pénible à établir) ; en déduire que* $I_n \equiv 0(n!)$ *puis, que* $\lim_n I_n/n! = 0$. *Enfin, conclure que* $\pi \notin \mathbb{Q}$.
2) ***(irrationalité de*** e***)*** *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^x dx$, *montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe* $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ *tels que* $I_n = a_n + eb_n$. *On suppose qu'il existe* $p, q \in \mathbb{N}^\star$ *tels que* $e = p/q$, *montrer que* $I_n \geq q^{-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *et en déduire que* $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3. *Evaluer pour* $\varepsilon > 0$ *:* $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} x^{1-\varepsilon} \int_x^{x+1} \sin(t^2)dt$.

Exercice 4. *Nature de l'intégrale impropre :* $\displaystyle\int_b^{\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right) dx,\ (a,b) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 5. *Convergence et calcul de* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x(e^{ax}+1)(e^{ax}+1)}dx,\ (a > b > 0)$.

Exercice 6. *(Autour du théorème des moments de Hausdorff)*
1) Soit $f \in C([a,b])$ *telle que* $\int_a^b f(t)t^n dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *montrer que* f *est identiquement nulle.*
2) Si $f(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$, *montrer que* $I_n := \int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}},\quad n \in \mathbb{N}$ *où* $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$. *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(pour cela, remarquer que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$*...).*

Exercice 7. *Etudier la suite de terme général* $\displaystyle u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Exercice 8. *Converge et calcul de* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2011(t+t^{-1})}\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Exercice 9. *Soit* $f\ :\ [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *continue, dérivable à l'origine et telle que* $f(0) = f'(0) = 0$. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^{-3/2}dt$ *converge.*

Exercice 10. *Convergence et convergence absolue de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^3 - t)dt$.

2. Dérivation

Exercice 11. *Soit* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application dérivable, montrer que* $f'(a)$ *est valeur d'adhérence de* $f'(]a,b[)$.

Exercice 12. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *une application dérivable sur* $]a,b[$ *sauf peut être en un point* $c \in]a,b[$. *Si* $f'(x)$ *admet une limite* l *lorsque* x *tend vers* c, *montrer que* f *est dérivable en* c *et* $f'(c) = l$.

Exercice 13. *1) Soit* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *montrer que* f *est continue à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre* 0 *à l'origine ; montrer que* f *est dérivable à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre* 1 *à l'origine.*
2) Soit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f *est discontinue en tous points de* $\mathbb{R}^\star$, *qu'elle est continue et dérivable à l'origine et nulle part deux fois dérivable. Toutefois montrer que* f *admet à l'origine un développement limité à tout ordre.*

Exercice 14. *(☕) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & si \;\; x = \frac{p}{q},\ p \wedge q = 1, \\ 1, & si \;\; x = 0, \\ 0, & si \;\; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Montrer que f est 1-périodique.
2) Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{Q}$.
3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4) Montrer que f est nulle part dérivable.

Exercice 15. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x) = O(x),\ (x \to +\infty)$, montrer que $f(x) = O(x^2),\ (x \to +\infty)$.*

Exercice 16. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^\star$ trois réels deux à deux distincts. Déterminer les applications $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 17. *Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant $2f(x+1) = f(x) + f(2x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, montrer que f est constante.*

Exercice 18. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que f est constante.*

Exercice 19. *Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que le millième chiffre aprés la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $N = 111\dots111 = (10^{1998} - 1)/9$ vaut 1.*

Exercice 20. *(L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange) Pour $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$ on note*

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1 \leq i \leq n} x_i,\ m = \min_{1 \leq i \leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\log$ et $\overline{x}, x_i \in [m, M]$ pour en déduire

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 21. *Utilisez la théorème des accroissement finis sur une fonction convenable pour établir la divergence de la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$.*

Exercice 22. *Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Si f' est bornée sur $]0,1]$ montrer que la suite de terme général $u_n = f(n^{-1})$ est convergente.*

Exercice 23. *On se fixe un point P sur la parabole $y = x^2$ (distinct de l'origine). La normale à $(\mathscr{P})$ passant par P recoupe la parabole en un point Q ; déterminer P pour que l'arc de parabole reliant P et Q soit de longueur minimale.*

Exercice 24. *En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \log(1+x)$ sur les segments $[0, x/q]$ et $[x/q, x/p]$, montrer que pour $0 < p < q$:*

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q, \quad \forall x > 0.$$

Exercice 25. *Montrer que $e^x \geq 1 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. En « déduire » l'inégalité arithmético-géométrique*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} := G_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_1, a_2 \dots, a_n \geq 0,$$

et préciser le cas d'égalité (appliquer l'inégalité à $x = -1 + a_i/A_n,\ 1 \leq i \leq n$...).

Exercice 26. *Montrer que $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \quad \forall x \in [0, \pi/2]$, et représenter graphiquement cette inégalité (pour la première inégalité on pourra par exemple montrer que pour tout $0 < x < \pi/2$,il existe $0 < \theta < x$ tel que $\sin(x)/x = \cos(\theta)$ pour en déduire que la fonction $f(x) = \sin(x)/x,\ x \in]0, \pi/2],\ f(0) = 1$ est strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$...).*

Exercice 27. *On veut calculer $\lambda := \lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.*

a) Justifier l'existence de λ.
b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable, si $f(0) = 0$ montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \left(f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = \lambda f'(0).$$

c) En considérant $f(x) = \log(1+x)$, montrer que $\lambda = \log(2)$. (bonus : trouver une preuve plus simple avec les sommes de Riemann (intégration)).

Exercice 28. *Montrer que*

$$
\begin{array}{ll}
1) & \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3},\\
2) & \lim_{x\to 2_+}\left(2^x + 3^x - 12\right)^{\tan(\pi x/4)} = \exp\left[-\dfrac{4}{\pi}\left(4\log(2) + 9\log(3)\right)\right],\\
3) & \lim_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{t^2+t}) - \mathrm{sh}(\sqrt{t^2-t})}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t^2} - \dfrac{t^6}{6}\log^2(t)} = \dfrac{e-1}{2},\\
4) & \lim_{n\to+\infty}\left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}} = 1,\\
5) & \lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)} = e^{-1},\\
6) & \lim_{x\to 1}\dfrac{\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1} = 1,\\
7) & \lim_{x\to 0_+}\left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin(1/x)\right)^x = 1.
\end{array}
$$

Exercice 29. *Soient $0 < a < b$, pour $x \in \mathbb{R}^\star$ on pose $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x^2}$.*

1) Montrer que f se prolonge à l'origine en une fonction dérivable.
2) Montrer que $f(x)f(-x) = ab$.
3) Etudier et representer soigneusement f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30. *Etudier et representer soigneusement $f(x) = \log\left(2 - e^{-1/x}\right)$ sur son domaine de définition.*

Exercice 31. *Soit $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x + 3x^2 + ... + 2009x^{2010}}$, que vaut $f^{(2010)}(0)$? (commencez par écrire plus simplement f pour en déduire facilement un développement limité à l'ordre 2010 à l'origine...).*

Exercice 32. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\log(2)} - \dfrac{1}{2^x - 1} & si \quad x \in \mathbb{R}^\star,\\ a & si \quad x = 0. \end{cases}
$$

Comment choisir $a \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue à l'origine ? f ainsi prolongée est-elle dérivable à l'origine ?

Exercice 33. *Soit $f \in \mathscr{C}^3([0,1])$ telle que $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $0 < c < 1$ tel que $f^{(3)}(c) \geq 24$.*

Exercice 34. *Calculer d'au moins trois manières différentes le développement limité à l'ordre 3 à l'origine de la fonction tangente*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/agreg.html Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr