Autour de la fonction Gamma : Soit $f\ :\ (x,t)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star\longmapsto f(x,t):=t^{x-1}e^{-t}$. Montrer que pour tout $x>0$ la fonction$f(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On définit alors la fonction Gamma par

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^\star.$$

(1) Montrer que $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$:$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^\infty\big(\log(t)\big)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

(2) Etablir successivement $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x),\ \forall x>0$; $\Gamma(n+1)=n!,\ \forall n\in\mathbb{N}\quad \Gamma(x)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}$.

(3) A l'aide de la formule $e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ et de la suite de fonctions de terme général $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\chi_{]0,n]}(t),\ n\geq 1$, montrer que $\Gamma'(1)=-\gamma$ (γ est la constante d'Euler).

(4) Aprés avoir établi pour $x>0$: $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\frac{1}{x}$ montrer que $\Gamma'(n+1)=n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right),\ n\geq 1$.

(5) Au moyen du changement de variables $s=\frac{t-x}{\sqrt{x}}$, établir pour $x>0$: $\Gamma(x+1)=\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{\varphi(x,s)}ds$ où $\varphi(x,s):=x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}$

(6) Montrer que $\forall s\in]-\sqrt{x},0]\ :\ \varphi(x,s)\leq-\frac{s^2}{2}$ et $\forall s\geq 0,\ x\geq 1\ :\ \varphi(x,s)\leq\varphi(1,s)$.

(7) En déduire $\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{\varphi(x,s)}ds=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$ puis la formule de Stirling

$$\Gamma(x+1)\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}.$$

(8) Montrer que pour tout $x>0$: $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\Gamma(x)$, et en déduire la formule de Gauss : $\forall\,x\in]0,+\infty[,\quad \Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

(9) Puis celle de Weierstrass : $\forall\,x\in]0,+\infty[,\quad \Gamma(x)=xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$.

(10) On note $\psi\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, l'application définie pour $x>0$ par $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Démontrer que pour tout $x>0\ :\ \psi(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x(x+n)}$, et en déduire que $\Gamma'(1)=-\gamma=\int_0^{+\infty}e^{-x}\log(x)dx$.

(11) (Le théorème de Bohr-Mollerup) Montrer que $\log\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^\star$. Réciproquement, soit $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star\to\mathbb{R}_+^\star$ une application log-convexe vérifiant $f(1)=1$ et $\forall\,x>0,\ f(x+1)=xf(x)$.; montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que $f=\Gamma$

31 octobre 2010 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/masterenseignement.html Mél : lassere@math.ups-tlse.fr