

Mai 2009

Exercice 1 : Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose $\mathcal{C}(A) = \text{vect}\{I_n, A\}$. On suppose que

$$|\det(A + B)| \geq |\det(I_n + B)|, \quad \forall B \in \mathcal{C}(A).$$

Montrer que $A - I_n$ est nilpotente.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2009x^{2010}}$, que vaut $f^{(2009)}(0)$?

Exercice 3 : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant

$$\int_x^y f(t)dt = \frac{y-x}{6}(f(x) + 4f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$