AGREGATION INTERNE DE MATHEMATIQUES – 2009/2010
PETITS EXERCICES ELECTRONIQUES
☢ ☯ ☢ JUIN 2009. ☢ ☯ ☢

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{N})$ une matrice à coefficients entiers inversible. On suppose que l'ensemble des coefficients de toutes les puissance A^r, $(r \in \mathbb{N}^\star)$ de A est fini et on se propose de montrer que A est la matrice d'une permutation (i.e. il existe une permutation π de $\{1, 2, \dots, n\}$ telles que $Ae_i = e_{\pi(i)},\ 1 \leq i \leq n$).

0) Montrer que toute matrice de permutation vérifie bien les hypothèses.

1) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^r = I_n$.

2) Montrer qu'il existe une permutation π de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \neq 0$.

3) Notons P la matrice associée à la permutation précédente et écrivons $A = P + B$. Montrer que B est nulle.

Exercice 2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Si A est annulée par un polynôme scindé à racines simples de module strictement inférieur à 1, montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 3 : Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \log(1-x) \right\} = -\frac{\log^2(1-x)}{2}.$$

☯ 12 juin 2009 ☯ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr
Page ouèb : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/agreg.html