Exercice 1. (☕) *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & si \quad x = \frac{p}{q}, \ p \wedge q = 1, \\ 1, & si \quad x = 0, \\ 0, & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Montrer que f *est* 1*-périodique.*
2) Montrer que f *est discontinue sur* $\mathbb{Q}$*.*
3) Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*.*
4) Montrer que f *est nulle part dérivable.*

Solution : 1) Si x est irrationnel il en est de même pour $x+1$ donc $f(x) = f(x+1) = 0$. Si $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$ alors $x+1 = (p+q)/q$ et comme $(p+q) \wedge q = p \wedge q = 1$ on aura encore $f(x+1) = f(x)$ enfin $f(n) = 1 = f(0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. f est bien périodique de période 1.

2) Si $x \in \mathbb{Q}^\star$, $x = p/q, p \wedge q = 1$ alors $f(x) = 1/q > 0$, mais par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe aussi une suite $(x_n)_n$ de nombre irrationnels qui converge vers x : par définition de f la suite $(f(x_n))_n$ est identiquement nulle et ne peut donc converger vers x. Le même argument marche pour $x = 0$ puisque $f(x) = 1 > 0$

3) On travaille sur $[0,1]$ (vu (1)). Soit $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, pour $\varepsilon > 0$ posons

$$S_\varepsilon := \{p/q \in [x-1, x+1] \cap [0,1] : q \in \{1, 2, \dots, E(\varepsilon^{-1})\} \ \}.$$

Cet ensemble est fini, il existe donc un voisinage $]x-\delta, x+\delta[$ de x tel que $]x-\delta, x+\delta[\cap S_\varepsilon = \emptyset$. Montrons que $|x-y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$: si $y \in]x-\delta, x+\delta[\setminus \mathbb{Q}$ alors $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$; si $y = p/q, \ p \wedge q = 1$ alors comme $y \notin \{1, 2, \dots, E(\varepsilon^{-1}\}$ nécessairement $q > E(\varepsilon^{-1}) > \varepsilon^{-1}$ soit $|f(x) - f(y)| = 1/q < \varepsilon$. CQFD.

4) Il reste à montrer que f est nulle part dérivable : f n'étant pas continue sur $\mathbb{Q}$, seuls les points rationnels sont douteux. Soit donc $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ alors comme $x_n := x + n^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on aura $\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, par conséquent si f est dérivable au point x on aura $f'(0) = 0$. On va construire une nouvelle suite $(y_n)_n$ convergente vers x telle que $\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \geq 1$ ce qui nous fournira la contradiction désirée.
Pour cela, soit $x = 0, a_0 a_1 \dots a_n \dots$ le développement décimal de x et posons $h_n = 0, a_1 a_2 \dots a_n - x = -0, 0 \dots 0 a_{n+1} \dots \notin \mathbb{Q}$. Comme x est non nul et irrationnel il existe des $a_i \neq 0$ avec i, désignons par N le premier entier tel que $a_N \neq 0$ (ie $x = 0, 0 \dots 0 a_N a_{N+1} \dots \dots$) nous aurons pour $i \geq N$:

$$0, a_1 a_2 \dots a_i = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_i}{10^i} = \frac{a_1 10^{i-1} + a_2 10^{i-2} + \dots + a_i}{10^i}$$

par conséquent

$$f(0, a_1 a_2 \dots a_i) \geq \frac{1}{10^i}$$

(en effet si $a_1 10^{i-1} + a_2 10^{i-2} + \dots + a_i$ et 10^i ne sont pas premiers entre-eux le dénominateur ne peut que diminuer...) d'autre part

$$|h_i| = |0, 0 \dots 0 a_{i+1}| < 10^{-i}$$

si bien que pour tout $i \geq N$:

$$\left|\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}\right| = \left|\frac{f(0,a_1a_2\dots a_i)}{h_i}\right| \geq \frac{10^i}{10^i} = 1,$$

et la suite $(y_i = x+h_i)_{i\geq N}$ a la propriété désirée. CQFD. ■

ℹ **Remarques :** • Cet exemple est du à K. J. Thomae en 1875.
• On pourrai imaginer modifier légèrement cette fonction pour la rendre dérivable sur les irrationnels de la manière suivante : étant donné une suite $a = (a_n)_n$ décroissante vers 0 posons :

$$f_a(x) = \begin{cases} a_n, & \text{si } x = \frac{m}{n},\ m \wedge n = 1, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(la fonction f de Thomae dans l'exercice correspond donc à la suite de terme général $a_n = 1/n$). Mais, quelque soit le choix de la suite $a = (a_n)_n$ la fonction f_a sera non dérivable sur une partie non dénombrable dense de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; c'est une conséquence du résultat suivant :

« soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction nulle sur $\mathbb{Q}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Alors, il existe une partie non dénombrable dense de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sur laquelle f ne sera pas dérivable ».

Toutefois, on peut tout de même construire des fonctions f_a dérivables sur des parties dense dénombrables de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ car :

« Soit $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'irrationnels, alors il existe une fonction f_a qui sera dérivable en chaque r_i »

Je vous rédigerai peut être les preuves si je trouve le temps.
• Il est par contre vain d'essayer de construire une fonction continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: l'existence un tel objet est contraire aux accords de Koyto et surtout au théorème de Baire (à suivre...).

Exercice 2. ***(une fonction continue mais nulle part monotone)****. Soit $f_1(x) = |x|$ pour $|x| \leq 1/2$ que l'on prolonge continuement sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. On pose alors pour $n \geq 2$: $f_n(x) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x)$ puis $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.*
1) Montrer que f_n, $(n \geq 2)$ est continue de période 4^{-n+1}.
2) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas monotone au voisinage de tout point de la forme $a = k\cdot 4^{-m}$, $(k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N})$ (évaluer le signe de $f(a \pm 4^{-2m-1}) - f(a)$...) et conclure.

Solution : 1) f_1 étant continue sur $\mathbb{R}$ il en est de même des f_n, $(n \geq 2)$. En outre f_1 étant 1-périodique $f_n(x+4^{-n+1}) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}(x+4^{-n+1})) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x+1) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x) = f_n(x)$, f_n est donc 4^{-n+1}-périodique.
2) $\|f_1\|_\infty \leq 1/2$ implique $\|f_n\|_\infty \leq 2\cdot 4^{-n}$: la série $\sum_n f_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $a = k\cdot 4^{-m}$, $(k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N})$. f_1 étant 1-périodique, $f_1(0) = 0$ implique que $f_1(k) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, par conséquent si $n > m$: $f_n(a) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}k\cdot 4^{-m}) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1-m}k) = 0$ (car $n \geq m+1$) ; pour les mêmes raisons $n > 2m+1$ implique que $f_n(a+4^{-2m-1}) = 0$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
f(a+4^{-2m-1})-f(a) &= \sum_{n=1}^{2m+1} f_n(a+4^{-2m-1}) - \sum_{n=1}^{m} f_n(k\cdot 4^{-m}) \\
&= \sum_{n=m+1}^{2m+1} f_n(a+4^{-2m-1}) + \sum_{n=1}^{m} \left(f_n(a+4^{-2m-1}) - f_n(k\cdot 4^{-m})\right) \\
&= \sum_{n=m+1}^{2m+1} 4^{-n+1} f_1\left(k4^{n-1-m}+4^{n-2m}\right) + \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{m} 4^{-n+1}\left(f_1(k4^{n-1-m}+4^{n-2m}) - f_1(k\cdot 4^{n-m})\right)
\end{aligned}$$

en cours de rédaction, à suivre

=

ℹ **Remarque :** On peut aussi justifier l'existence de telles fonctions avec le théorème de Baire............a suivre...

Exercice 3. *(☕) (l'équation fonctionnelle de Cauchy) Il s'agit d'étudier les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$(\bigstar) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer les solutions de $(\bigstar)$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R})$*.*
2) Déterminer les solutions de $(\bigstar)$ *continues en au moins un point.*
3) Déterminer les solutions de $(\bigstar)$ *bornées sur au moins un intervalle.*
4) Montrer que $(\bigstar)$ *admet des solutions discontinues (en construire une à partir d'une* $\mathbb{Q}$*-base du* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}$*). Montrer que le graphe d'une telle solution est dense dans* $\mathbb{R}^2$*.*

Solution :

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que* $f^{-1}(\{q\})$ *soit fermé pour tout* $q \in \mathbb{Q}$ *(ou une quelconque partie dense dans* $\mathbb{R}$*). Montrer que* f *est continue.*
Connaissez vous un exemple d'une fonction possédant la propriété des valeurs intermédiaires qui ne soit pas continue ?

Solution : Supposons que f soit discontinue en un point $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(x_n)_n$ convergente vers x telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $n_k > k$ vérifiant

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout entier k on a $f(x_{n_k}) \geq f(x)+\varepsilon > f(x)$ ou bien $f(x_{n_k}) \leq f(x)+\varepsilon < f(x)$. L'une au moins de ces deux inégalités est réalisée pour une infinité de k, sans perdre de généralité et quitte à extraire une sous-suite supposons que la première soit vérifiée pour tout k. Considérons alors $q \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x)+\varepsilon > q > f(x)$. Nous avons alors $f(x_{n_k}) > q > f(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ et f vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in (x, x_{n_k})$ tel que $f(y_k) = q$, ce qui ne veut rien dire d'autre que la suite $(y_k)_k$ convergente vers x est incluse dans $f^{-1}(\{q\})$ fermé de $\mathbb{R}$: $x \in f^{-1}(\{q\})$ i.e. $f(x) = q$ ce qui est bien entendu absurde. ■

ℹ **Remarques :** ➪ Une fonction continue sur un intervalle vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque bien entendu est incorrecte, pour en fournir un exemple simple il suffit de se souvenir (voir un autre exercice) du théorème de Darboux qui dit qu'une fonction dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires et de construire une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée non continue, l'exemple standart étant

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

➪ On peut aussi contruire ([**?**],pages 79-80) une fonction nulle part continue mais vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, un exemple toutefois bien délicat et fortement déconseillé pour l'oral...

Exercice 5. *Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, un polynôme non constant. L'objectif est de déterminer les points isolés de $\mathscr{E} := \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ P(A) = 0 \}$*

1) Soit $A \in \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$, montrer qu'il existe un voisinage V de l'origine dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V$.
2) Montrer que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, en déduire que $A = \lambda I_n, \ \lambda \in \mathbb{C}$.
3) Soit λ une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2 ; à l'aide des matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1}E_{12}$, montrer que $\lambda I_n \notin \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$.
4) Montrer que $\mathrm{Iso}(\mathscr{E})$ est l'ensemble des matrices scalaires λI_n où λ est racine de P de multiplicité 1.

Solution : Il est essentiel de se souvenir qu'un point isolé est toujours dans l'ensemble. Remarquons aussi qu'ici $\mathscr{E}$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $A \mapsto P(A)$. On peut enfin observer que $A \in \mathscr{E}$ implique que les valeurs propres de A sont des racines de P et que la classe de conjugaison $\mathscr{S}_A = \{ P^{-1}AP, \ P \in GL_n(\mathbb{C}) \}$ de A est aussi dans $\mathscr{E}$. Comme $\mathscr{S}_A$ est non bornée dès que[1] $A \neq \lambda I_n$ il en sera de même pour $\mathscr{E}$ dès que P admet au moins deux racines distinctes.

❶ L'ensemble $\Omega = \{ H \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ I_n + H \in GL_n(\mathbb{C}) \}$ est bien entendu ouvert et pour $H \in \Omega, A \in \mathscr{E}$ nous avons

$$P\left((I_n + H)A(I_n + H)^{-1}\right) = (I_n + H)P(A)(I_n + H)^{-1} = 0.$$

Par conséquent l'application continue $\varphi \ : \ \Omega \ni H \mapsto \ \varphi(H) = (I_n + H)A(I_n + H)^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$ est à valeurs dans $\mathscr{E}$ (i.e. $\varphi(\Omega) \subset \mathscr{E}$). En outre,vu que $\varphi(0) = A$, pour tout voisinage V de A, $\varphi^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine dans Ω.
Supposons maintenant que $A \in \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$, il existe un voisinage V_A de A dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que $V_A \cap \mathscr{E} = \{A\}$, et, vu ce qui précède, un voisinage V_0 de l'origine tel que $V_0 \subset \varphi^{-1}(V_A)$. Ainsi, comme $\varphi(\Omega) \subset \mathscr{E}$ nous aurons $\varphi(V_0) \subset V_A \cap \mathscr{E} = \{A\}$ soit $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V_0$.

❷ $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V_0$ implique $HA = AH$ pour tout $H \in V_0$. A commute déja avec le voisinage de l'origine V_0 ; soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice arbitraire, il existe $\varepsilon > 0$ tel que (ici, le fait que Ω soit ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$ est fondamental puisqu'il assure l'existence d'une vraie boule $B(0, \varepsilon) \subset \Omega$...voisinage relatif ne suffit pas...) $\varepsilon B \in V_0$ si bien que $\varepsilon(BA) = (\varepsilon B)A = A(\varepsilon B) = \varepsilon(AB)$ soit $BA = AB$. Ainsi tout point isolé A de $\mathscr{E}$ commute avec tout $M_n(\mathbb{C})$, par un exercice classique d'algèbre linéaire ([**?**]) $A = \lambda I_n, \ \lambda \in \mathbb{C}$.

1. Voir l'exercice ? ? ? sur les classes de conjugaison.

🛈 Il est bon de remarquer à ce niveau de l'exercice que $A = \lambda I_n \in M_n(\mathbb{C}) \cap \mathscr{E}$ implique $0 = P(A) = P(\lambda)I_n$, soit $P(\lambda) = 0$ et λ est un zéro de P. Les éventuels points isolés de $\mathscr{E}$ sont donc dans l'ensemble fini $\{\, \lambda I_n,\ P(\lambda) = 0 \,\}$.

❸ Λ désignant l'ensemble (éventuellement vide) des racines simples de P, montrons que l'ensemble des points isolés de $\mathscr{E}$ est $\mathscr{A} := \{\, \lambda I_n,\ \lambda \in \Lambda \,\}$.

➪ Si λ est une racine multiple de P, alors $(X-\lambda)^2$ divise P. Considérons la suite de matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1}E_{12},\ k \in \mathbb{N}^\star$, elle converge vers λI_n et on a $(M_k - \lambda I_n)^2 = (k^{-1}E_{12})^2 = 0$, si bien que

$$P(M_k) = \prod_{\mu\ :\ P(\mu)=0} (M_k - \mu I_n) = (M_k - \lambda I_n)^2 Q(M_k) = 0.$$

(comme polynômes en M_k les endomorphismes du produit commutent justifiant les deux égalités) La suite $(M_k)_k$ est donc bien dans $\mathscr{E}$ et λI_n n'est pas isolé dans $\mathscr{E}$.

➪ Si P admet au moins une racine simple $\lambda(\in \Lambda)$ montrons que λI_n est isolée dans $\mathscr{E}$. Sinon, il existe dans $\mathscr{E} \setminus \{\lambda I_n\}$ une suite $(N_k)_k$ convergente vers λI_n et par continuité de l'application $A \mapsto \chi_A$, la suite de polynômes χ_{N_k} converge vers $\chi_{\lambda I_n} = (\lambda - X)^n$. Mais cette suite convergente est inclue dans l'ensemble **fini** $\{\, \chi_A,\ A \in \mathscr{E}\}$ (fini car les valeurs propres d'un élément de $\mathscr{E}$ sont forcément des racines de P) elle est donc stationnaire i.e. $\chi_{N_k} = (\lambda - X)^n$ à partir d'un certain rang. On a alors :

$$\begin{cases} \chi_{N_k} = (\lambda - X)^n \\ P(N_k) = 0 \\ \lambda \text{ racine simple de } P, \end{cases}$$

et dans ce cas, la seule alternative est que le polynome minimal de N_k soit égal à $X - \lambda I_n$ i.e. $N_k = \lambda I_n$ à partir d'un certain rang et le point λI_n est bien isolé dans $\mathscr{E}$. ■

Exercice 6. *(☕) Soit $a > 0$. Sur l'espace $\mathscr{C}^0([0,1])$ on considère les normes :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = a\int_0^1 |f(t)|dt.$$

1) Vérifier que ce sont bien deux normes sur $\mathscr{C}^0([0,1])$.
2) Montrer que $\|f\| := \min\{\|f\|_\infty, \|f\|_1\}$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ si et seulement si $a \leq 1$.

Solution : 1) Que ce soit deux normes sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ ne doit pas poser de problèmes.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $f_n(t) = t^n,\ t \in [0,1]$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = 1,\ \|f_n\|_1 = \frac{a}{n+1} \text{ donc } \|f_n\| = \min\left\{1, \frac{a}{n+1}\right\},$$

et

$$\|f_0+f_n\|_\infty = 2,\ \|f_0+f_n\|_1 = a\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \text{ donc } \|f_0+f_n\| = \min\left\{2, a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ alors $\|f_0 + f_n\| \leq \|f_0\| + \|f_n\|$, soit

$$\min\left\{2, a\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\} \leq \min\{1,a\} + \min\left\{1, \frac{a}{n+1}\right\}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

faisons maintenant tendre n vers $+\infty$, il reste

$$\min\{2,a\} \leq \min\{1,a\} + \min\{1,0\} = \min\{1,a\}$$

qui implique $a \leq 1$.

Réciproquement si $a \leq 1$, alors $\|f\|_1 = a\int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_\infty$ et par conséquent : $\|f\| := \min\{\|f\|_\infty, \|f\|_1\} = \|f\|_1$ qui est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1])$. ■

🛈 **Remarque :** A la différence du « max » le « min » de deux normes n'est en général pas une norme.

Exercice 7. *(☕) 1) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\, a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2.*
2) Pour $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on pose $N_1(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}|,\ N_2(a+b\sqrt{2}) = |a| + |b|$; montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ qui ne sont pas équivalentes. Commentaires ?

Solution : 1) C'est clair.

2) Que N_1 et N_2 soient deux normes sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est immédiat. Considérons maintenant les deux suites :

$$u_n = (1-\sqrt{2})^n, \quad v_n = (1+\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec la formule du binôme on a

$$\begin{aligned} u_n &= (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{N}, \\ v_n &= (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \\ a_n &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{aligned}$$

si bien que $\lim_n u_n = 0, \lim_n v_n = +\infty$ et $\lim_n a_n = +\infty$, par conséquent

$$\begin{aligned} N_1(u_n) &= |1-\sqrt{2}|^n \qquad \Longrightarrow \quad \lim_n N_1(u_n) = 0, \\ N_2(u_n) &= |a_n| + |b_n| \qquad \Longrightarrow \quad \lim_n N_2(u_n) = +\infty \end{aligned}$$

ces deux limites assurent la non équivalence des deux normes. ■

🛈 **Remarque :** *« ...en dimension finie toutes les normes sont équivalentes... »* oui mais pour des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou plus généralement sur un corps à boule unité compacte. C'est en effet la compacité de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$) (pour la norme « sup » par exemple) qui est l'ingrédient essentiel de la démonstration, ici le corps est $\mathbb{Q}$ où la boule unité associée n'est plus compacte et plus rien ne marche.