

Exercice 1. Montrer que $\int_0^\pi e^{\sin(x)} dx > \pi e^{\pi/2}$.

Exercice 2. Déterminer le millième chiffre après la virgule de la racine carrée de $N = 11 \dots 11 = \frac{10^{1998} - 1}{2}$.

Exercice 3. Évaluer à la main la quantité $\int_0^{1/2} \frac{\sin(t)}{t} dt$ avec une précision décimale d'au moins deux chiffres après la virgule.

Exercice 4. Préciser le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \int_0^\infty \frac{t^x dt}{P(t)}$ où $P(t) = 6t^6 + 4t^5 + 3t^4 + 8t^3 + 3t^2 + 4t + 6$, étudier son caractère C^1 . Etudier les extrémas de f sont-ils atteints ?

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction continue à support compact (nulle en dehors d'un compact) et \tilde{f} la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx} dt$.

- 1) Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 2) Montrer que \tilde{f} est développable en série entière sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que si \tilde{f} est à support compact, alors $f \equiv 0$.
- 4) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6. On considère les applications $f(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+x} dt$, $g(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- 3) Montrer que $f - g$ est 2π -périodique.
- 4) Montrer que f et g sont équivalentes à $\frac{1}{x}$ en $+\infty$ puis que $f = g$.
- 5) En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{[1/\sqrt{x}]} f(kx)$ pour $f \in \mathcal{C}^2(]-1, 1[)$.

Exercice 8. Calculer $\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 9. Etudier sur son domaine de définition la fonction $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt$; trouver une relation simple entre f et f'' pour en déduire la valeur de $f(x)$.