AGREGATION INTERNE DE MATHEMATIQUES – 2009/2010
PETITS EXERCICES ELECTRONIQUES
☢ ◕ ☢ SEPTEMBRE 2009. ☢ ◕ ☢

Septembre 2009

Exercice 1 : (American Math. Monthly, Aout/Septembre 2009) Soient P, Q deux polynômes vérifiant : degré de $Q = n \geq 2$, Q est sans racines multiples et degré de $P \leq n-2$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(r_i)}{Q'(r_i)} = 0,$$

(un théorème d'Abel) où $r_1, \dots, r_n$ sont les racines de Q (vous pouvez commencer par décomposer en éléments simples P/Q..).

Exercice 2 : Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) + f(x^2) = x, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Exercice 3 : Soit $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^3 telle qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f''(c) = 0$ et $f'''(c) \neq 0$; montrer que f ne présente pas d'extremum au point c (trois fois dérivable suffit en fait...).

Exercice 4 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\sin(x)} dx > \pi e^{2/\pi}$.

Exercice 5 : Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$ de classe C^1 vérifiant $f'(x) \geq f^2(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Rappel des épisodes précédents (hi vert, printemps 2009) :

Exercice 1 : Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose $\mathscr{C}(A) = \text{vect}\{I_n, A\}$. On suppose que

$$|\det(A+B)| \geq |\det(I_n+B)|, \ \forall B \in \mathscr{C}(A).$$

Montrer que $A - I_n$ est nilpotente.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+2x+3x^2+...+2009x^{2010}}$, que vaut $f^{(2009)}(0)$?

Exercice 3 : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant

$$\int_x^y f(t)dt = \frac{y-x}{6}\left(f(x) + 4f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 : (RMS, janvier 2009). Soit Γ une partie compacte et stable dans $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que c'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : (American Math. Monthly, janvier 2009). Montrer que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right) := \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right) = \frac{e\sqrt{e}}{2\pi}.$$

Exercice 6 : (American Math. Monthly, janvier 2009, encore une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$). Soit $f(x) = (\sqrt{2}-1)x$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on définit l'orbite des itérés de f en x_0 par :

$$\mathscr{O}_{x_0} = \{ \ (\sqrt{2}-1)^n x_0, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ l'orbite tends vers 0.
b) On suppose que $\sqrt{2} = p/q$ est un nombre rationnel. Montrer que $(\sqrt{2})^n q \in \mathbb{N}^\star$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et conclure.

Exercice 7 : Soit $P(x) = 6 + 4x + 3x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 \in \mathbb{R}[x]$, on pose pour $x \in [0, 5[$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)}dt.$$

En quels point de $[0, 5[$, g atteint-elle sa borne inférieure ? Que dire de sa borne supérieure ?

Exercice 8 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$; on suppose que $f(x+3/10) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0, 7/10]$, montrer que f admet au moins 7 zéros dans $[0, 1]$.

Exercice 9 : En considérant $f(t) = \exp(e^{it})$ montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)}dt = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!^2}.$$

◕ 25 septembre 2009 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr
Page ouèb : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/agreg.html