

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$, on suppose que toutes les colonnes de A sont des permutations de la première colonne de A . Montrer que si la somme des termes dans la première colonne n'est pas nulle, alors elle divise le déterminant de A .

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq e, \\ xf(\log x), & \text{si } x > e. \end{cases}$$

Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$?