Université Paul Sabatier **Juin 2011**

☯ L2 PCP – Préparation à l'oral : Séries de Fourier. ☯

Exercice 1. *Montrer que* $f(x) = \sin^3(x)$ *est développable en série de fourier et préciser ce développement.*

Exercice 2. *Soit* $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *(continue et* 2π*-périodique...). Si tous les coefficients de Fourier de* f *sont nuls ; montrer que* f *est identiquement nulle.*

Exercice 3. *(mines 96) Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ *(de classe* C^1 *et* 2π*-périodique) vérifiant* $2f(x+1) = f(x) + f(2x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *(mines 94) Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ *(de classe* C^∞ *et* 2π*-périodique) vérifiant* $f(2x) = 2\sin(x)f'(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *Existe-t'il* $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ *dont la série de Fourier soit* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ *?*

Exercice 6. *Démontrer que* $f(x) = \log(2 + cos(x)),\ (x \in \mathbb{R})$ *est développable en série de Fourier et préciser ce développement.*

Exercice 7. *(mines 2003) Démontrer que* $f(x) = Arsin(\sin x)$ *est développable en série de Fourier et préciser ce développement.*

Exercice 8. *Utiliser les séries de Fourier pour évaluer l'intégrale*

$$I_n = \int_0^\pi \cos(\cos(x))ch(\sin(x))\cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 9. *(X, 1997) Démontrer que* $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)},\ (x \in \mathbb{R})$ *est développable en série de Fourier et préciser ce développement (deux méthodes sont possibles : développer la fraction en une série d'exponentielles* $e^{ikx}, (k \in \mathbb{Z})$ *ou bien trouver une relation de recurrence satisfaite par les coefficients de Fourier réels de* f*) .*

Exercice 10. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. La fonction* $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ *est-elle développable en série de Fourier ? Calculer ce développement (indic : éviter le calcul direct des coef.).*

Exercice 11. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction paire,* 2π*-périodique égale à* $\sqrt{x}$ *sur* $[0, \pi]$.

(1) *Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que* f *est développable en série de Fourier ?*

(2) *Soit* G *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$*, montrer que pour tout* $x > 0$ *:* $G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$*. En déduire que la limite* $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ *existe, est finie et strictement positive.*

(3) *Soit pour* $n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$*. à l'aide de la question précédente montrer que* $a_n = 0(n^{-3/2})$.

(4) *Montrer que* f *est développable en série de Fourier.*

13 juin 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

Solutions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$.

(1) Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?

(2) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x > 0$

$$G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt.$$

(3) En déduire que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ existe, est finie et strictement positive.

(4) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$. à l'aide de la question précédente montrer que $a_n = 0(n^{-3/2})$.

(5) Montrer sans Fejèr que f est développable en série de Fourier.

(6) Montrer avec Fejèr que f est développable en série de Fourier.

(1) Non car en les points $2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ f n'est pas dérivable et n'admet pas de dérivée à droite et à gauche (ailleurs f est continue et $\mathscr{C}^\infty$ sauf en les points $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou f n'est pas dérivable mais admet une dérivée à droite et à gauche).

(2) C'est une bestiale intégration par parties faisant apparaître une intégrale généralisée (avec la régle habituelle qu'elle marche si deux termes parmi les trois existent : en zéro pas problème — faire un DL—) il en résulte (le premier terme à droite tend vers zéro car majoré par $1/2|x|$ et $\frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}$ est intégrable en l'infini puisque majoré en module par $1/|x|^2$) que $\lim_{x\to\infty} G(x)$ existe et vaut $\int_0^\infty \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt = C > 0$.

(3) On a :

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{t}\cos(nt)dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{n\pi}} \frac{u}{\sqrt{n}}\cos(u^2)\frac{2u\,du}{n} \quad \text{(avec le changement } u = \sqrt{nt}) \\
&= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} u^2\cos(u^2)du \\
&= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\left(\left[\frac{u\sin^2(u)}{2}\right]_0^{\sqrt{n\pi}} - \int_0^{\sqrt{n\pi}} \frac{\sin(u^2)}{2}du\right) \\
&= -\frac{2}{\pi n^{3/2}}G(\sqrt{n\pi}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2C}{\pi n^{3/2}} \quad \text{(d'après la question précédente).}
\end{aligned}$$

(4) Vu ce qui précède, la série de Fourier de f : $S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, par suite $S_f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$; la convergence normale nous dit aussi que $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ est la série de Fourier de S_f i.e. les deux fonctions continues f et S_f ont les mêmes coefficients de Fourier : donc $f = S_f$ (par exemple via Parseval appliqué à $f - S_f$...) i.e.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx),$$

f est donc bien développable en série de Fourier.

(5) Le théorème de Féjer assure que les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction f continue convergent au sens de Césaro vers f, c'est donc ici le cas, mais la série de Fourier de f est aussi convergente sur $\mathbb{R}$ et la convergence usuelle implique la convergence au sens de Césaro et vers la même limite : le résultat suit. ■

Développer en série de Fourier la fonction $\qquad f(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$.

f est clairement $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, elle admet donc un développement en série de Fourier de la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ (Dirichlet).
Il est sage de se persuader qu'un calcul direct des coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}\cos(nx)dx$$

est plus qu'incertain, voire déconseillé, voici donc deux méthodes qui donnent ce développement par des chemins détournés.

❶ **Première méthode :**

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} = \frac{2+e^{ix}+e^{-ix}}{2(4-e^{ix}-e^{-ix})} = \frac{2e^{ix}+e^{2ix}+1}{2(4e^{ix}-e^{2ix}-1)} = F(e^{ix}) \text{ où } F(X) = -\frac{X^2+2X+1}{2(X^2-4X+1)}$$

Les pôles de F sont $\alpha = 2-\sqrt{3}$ et α^{-1} et on peut (après avoir décomposé en éléments simples) développer F en puissance relatives de X, (on retrouve le développement en série de Laurent de la fonction méromorphe F sur $\mathbb{C}$ sur la couronne $C(0,\alpha,\alpha^{-1})$ pour ceux qui s'en souviennent)

$$\begin{aligned} F(X) &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha\sqrt{3}}{X(1-\frac{\alpha}{X})} - \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha X}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{|n|}X^n, \qquad \alpha < |X| < \alpha^{-1} \end{aligned}$$

le cercle unité étant clairement inclus dans la couronne $\{\alpha < |X| < \alpha^{-1}\}$ on peut faire $X = e^{ix}$ dans le développement précédent

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} = F(e^{ix}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{|n|}e^{inx} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\geq 1}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)^n\cos(nx),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Nous avons donc trouvé un développement en série trigonométrique de f sur $\mathbb{R}$, visiblement normallement convergente sur $\mathbb{R}$: **c'est** le développement en série de Fourier de f (la convergence uniforme sur un intervalle de longueur 2π permet de s'en assurer (échange justifié de somme et d'intégrale))

❷ **Seconde méthode** : nous savons que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$ qu'on peut aussi écrire

$$(4-2\cos(x))\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = 1+\cos(x)$$

la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$ en réordonnant, on trouve

$$(4a_0 - a_1 - 1) + (4a_1 - a_0 - a_2 - 1)\cos(x) + \sum_{n\geq 2}(4a_n - a_{n-1} - a_{n+1})\cos(nx) = 0$$

cette série trigonométrique étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ses coefficients sont nuls (c'est du cours) donc

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} 4a_0 - a_1 & = 1 \\ 4a_1 - a_0 - a_2 & = 1 \\ 4a_n - a_{n-1} - a_{n+1} & = 0, \quad \forall\, n \geq 2. \end{cases}$$

on retrouve un système classique à résoudre : son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 1 = 0$ la solution générale est $a_n = \lambda\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Comme $\lim_n a_n = 0$, λ est nul et $a_n = a_1\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $n \geq 1$, enfin avec les deux premières équations de $(\bigstar)$ il vient $a_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $a_1 = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ et finalement

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\geq 1}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)^n\cos(nx).$$

■

Exercice 1 Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ (continue et 2π-périodique...). Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls ; montrer que f est identiquement nulle.

Solution : f n'est pas forcément développable en série de Fourier mais étant contnue, on peut tout de même lui appliquer la formule de Parseval qui assure que $\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = 0$; comme f est continue elle donc nulle sur $[0,2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité. ■

Exercice 4 Existe-t'il $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$?

Solution : Non, Parseval interdit ce genre de choses. ■

Exercice 5 Montrer que $f(x) = \sin^3(x)$ est développable en série de fourier et préciser ce développement.

Solution : f est $\mathscr{C}^\infty_{2\pi}$ donc développable en série de fourier. Tout calcul de coef est bien sûr inutile puisque aprés quelques manipulations élémentaires on trouve $f(x) = \sin^3(x) = \frac{\sin(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}$. C'est une série trigonométrique à deux termes donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ donc sur un intervalle de longueur 2π : c'est (cours) la série de fourier de f. ■

Utiliser les séries de Fourier pour évaluer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi}\cos(\cos(x))ch(\sin(x))\cos(nx)dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Tout calcul direct semble déraisonnable, on contourne cette difficulté en utilisant comme dans l'exercice ? ? ? ? ? ? les séries de Fourier. L'application régulière $f(x)=\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))$ est 2π-périodique paire, son coefficient de Fourier a_n vérifie donc

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}I_n.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer a_n. Pour cela écrivons

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))=\cos(\cos(x))\cos(i\sin(x))\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(\cos(x)+i\sin(x))+\cos(\cos(x)-i\sin(x))\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(e^{ix})+\cos(e^{-ix})\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2ikx}+e^{-2ikx}}{2}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cos(2kx).\end{aligned}$$

Cette dernière série étant normalement convergente sur $[0,2\pi]$, c'est la série de Fourier de f, par conséquent

$$I_n=\int_0^{\pi}\cos(\cos(x))\mathrm{ch}(\sin(x))\cos(nx)dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{si} \quad n=2k\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Q.E.D. ■

13 juin 2011 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http ://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr