Suites et séries de fonctions – Examen bis .

Durée de l'épreuve 2h, pas de documents, calculatrice, téléphone
les logarithmes sont népériens et on admet que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1. *On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_n = \int_0^\infty \frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt$.*

(1) *Justifier la convergence des intégrales impropres.*
(2) *Par convergence dominée déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.*
(3) *Montrer que $a_n - l = -\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi} + \frac{J}{\sqrt{n}}$ où J sera donné sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $f_n(t) = \sqrt{f^2(t) + \frac{1}{n}}$.*

(1) *Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.*
(2) *Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$.*

Exercice 3. *On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sum_{n=1}^\infty xe^{-n^2x^2}$.*

(1) *Montrer que f est bien définie.*
(2) *Montrer qu'il n'y a pas normale convergence sur $\mathbb{R}_+$.*
(3) *Montrer qu'il y a normale convergence sur tout intervalle $[a,b]$, $(0 < a < b < +\infty)$.*
(4) *Qu'en déduire pour la continuité de f ?*
(5) *Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$: $f(1/N) \geq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-n^2/N^2}}{N}$.*
(6) *f n'est est-elle continue à l'origine ?*
(7) *Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$: $\int_{n-1}^n xe^{-t^2x^2}dt \geq xe^{-n^2x^2} \geq \int_n^{n+1} xe^{-t^2x^2}dt$.*
(8) *En déduire que pour tout $x > 0$: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \geq f(x) \geq \int_x^\infty e^{-u^2}du$.*
(9) *Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.*
(10) *f admet-elle une limite en 0_+ ?*
(11) *Calculer $\int_0^\infty f(t)dt$.*

Exercice 4. (1) *Calculer $\int_a^b \sin^2(nt)dt$, $n \in \mathbb{N}$.*

(2) *Existe-t-il un intervalle $[a,b]$ non réduit à un point sur lequel la suite de fonctions $(f_n(t) = \sin^2(nt))_n$ converge simplement vers zéro ?*
(3) *Même question avec la suite de fonctions $(g_n(t) = \sin(nt))_n$.*

Fin de l'épreuve.