`Durée de l'épreuve 2h, pas de documents, calculatrice, téléphone...`
`Les logarithmes sont tous népériens.`

Exercice 1. *On pose pour* $n \geq 2$ *et* $t \in \mathbb{R}$: $f_n(t) = \dfrac{te^{-nt}}{\log n}$.

(1) *Préciser le domaine de simple convergence de la* ***suite de fonctions*** $(f_n)_n$ *ainsi que sa limite.*

(2) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.

(3) *Etudier la simple convergence de la* ***série de fonctions*** $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.

(4) (a) *Calculer pour* $x > 2$ *l'intégrale* $\int_2^x \frac{dt}{t\log(t)}$ *et en « déduire » la nature de la série* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$.

(b) *La série de fonctions* $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ *est-elle normalement convergente sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

(5) *Montrer la normale convergence sur tout* $[a, b]$ $(0 < a < b < +\infty)$.

(6) *Sur quel plus grand intervalle sommes nous assurés de la continuité de* F *?*

(7) (a) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *et* $x > 0$ *:*

$$|F(x)| \leq \left|\sum_{n=2}^{N-1} f_n(x)\right| + \left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=2}^{N-1} f_n(x)\right| + \frac{x}{\log(N)} \cdot \frac{e^{-Nx}}{1-e^{-x}}.$$

(b) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *:* $\lim_{x\to 0_+} |F(x)| \leq \dfrac{1}{\log(N)}$.

(c) *Montrer que* F *est continue à l'origine.*

(8) *Montrer que la série de fonctions* $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n'(x)$ *est normalement convergente sur tout intervalle* $[a, b]$ $(0 < a < b < +\infty)$.

(9) *Que peut-on en déduire quant à la dérivabilité de* F *?*

(10) *On s'intéresse ici à la dérivabilité de* F *à l'origine.*

(a) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *et* $x > 0$ *:* $\left|\dfrac{F(x)}{x}\right| \geq \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{\log(n)}$.

(b) *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \left|\frac{F(x)}{x}\right| \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log(n)}$.

(c) *Conclusion ?*

(11) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log(n)}$.

`Tournez la page SVP`

Exercice 2. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

(1) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *(où* $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$*) est simplement convergente sur* $[0,1]$ *vers une fonction* f *que l'on précisera.*

(2) *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $[0,1]$.

(3) *Montrer que la suite* $(a_n)_n$ *converge et préciser sa limite* l.

(4) *Montrer qu'il existe un réel* $\alpha < 0$ *tel que*

$$a_n = l + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to +\infty).$$

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯