```
Durée de l'épreuve 1h30, pas de documents, calculatrice, téléphone.
Il est obligatoire de signaler les opérations sur les lignes/colonnes
effectuées dans vos calculs.
```

Exercice 1. *On considère pour $a \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + 2y + 4z = \beta \\ x + ay + a^2 z = \gamma \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système calculer son déterminant et étudier son rang.*

(2) *Résoudre le système lorsqu'il est de rang maximal en exprimant la solution à l'aide de déterminants qu'il n'**est pas utile** de calculer.*

(3) *Résoudre le système si $a = 2$.*

Exercice 2. *Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on pose :* $D(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. *Calculer **sous forme factorisée** $D(a_1), D(a_1, a_2), D(a_1, a_2, a_3)$ et en déduire $D(a_1, \ldots, a_n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.*

Exercice 3. *On considère pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + ay + a^2 z = \alpha \\ a^2 x + ay + z = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et étudier son rang suivant les valeurs de a.*

(2) *On suppose A_a de rang maximal, sans résoudre le système sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de ${}^t(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$? Si oui, quelle est l'allure dans l'ensemble des solutions ?*

(3) *Si $(\mathscr{S}_a)$ n'est pas de rang maximal, sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de${}^{(}\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$?.*

(4) *Résoudre le système si $a = -1$.*

Exercice 4. *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice.

`Tournez la page SVP`

Exercice 5. *On considère pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_a) \quad \begin{cases} x + ay + a^2 z = \alpha \\ a^2 x + ay + z = \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et étudier son rang suivant les valeurs de a.*

(2) *A_a est de rang maximal, et sans résoudre le système, sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de $^{(}\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$? Si oui, quelle est l'allure dans l'ensemble des solutions.*

(3) *Si $(\mathscr{S}_a)$ n'est pas de rang maximal, sommes nous assurés de l'existence de solutions pour tout choix de $^{(}\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$?.*

(4) *Résoudre le système si $a = -1$.*

☯ ☢ ☯ `Fin de l'épreuve.` ☯ ☢ ☯