`Durée de l'épreuve 1h30, pas de documents, calculatrice, téléphone.`
`Il est obligatoire de signaler les opérations sur les lignes/colonnes effectuées dans vos calculs.`

Exercice 1. *On considère pour $a, b \in \mathbb{R}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_{a,b}) \quad \begin{cases} ax & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & by & + & bz & = & \beta \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice $A_{a,b}$ du système et étudier son rang.*

(2) *Dans un repère Oab représenter les couples (a, b) tels que $A_{a,b}$ ne soit pas de rang maximal.*

(3) *Pour quels couple (a, b) le système $(\mathscr{S}_{a,b})$ admet-t-il une unique solution ?*

(4) ***Sans résoudre le système*** *que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système lorsque $A_{a,b}$ est de rang maximal.*

(5) *Même question si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*

(6) *Résoudre le système si $A_{a,b}$ n'est pas de rang maximal.*

(7) *Résoudre le système si $(a, b) = (2, -1)$.*

Exercice 2. *On considère pour $a \in \mathbb{C}$ le système linéaire :*

$$(\mathscr{S}_{a}) \quad \begin{cases} x & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & a^2y & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & a^3z & = & \gamma \end{cases}$$

(1) *Donner la matrice A_a du système et calculer son déterminant.*

(2) *Etudier le rang de A_a.*

(3) *Pour quelles valeurs de a le système admet-il une unique solution ? Préciser alors cette solution à l'aide de déterminants qu'il n'**est pas utile** de calculer.*

(4) *Résoudre le système lorsque $a = -1$.*

Exercice 3. *Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(1) *Montrer que $\forall n \geq 2 \ : \ \Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).*

(2) *En introduisant la suite de terme général $v_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}, (n \in \mathbb{N}^\star)$, montrer que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.*

`Tournez la page SVP`

Exercice 4. *Calculer* ***sous forme factorisée*** *le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Montrer que cette matrice est de rang maximal dès que le vecteur ${}^t(a, b, c)$ *évite dans* $\mathbb{R}^3$ *trois plans dont on précisera une équation cartésienne.*

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯