I.N.P. **5 février 2010**

☯ ☢ ☯ **Dérivation – Examen.** ☯ ☢ ☯

Durée de l'épreuve 1h30, pas de documents, calculatrice, téléphone...

Exercice 1. *Soit pour* $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1} - x}$.
a) Montrer que f *est bien définie et calculer sa dérivée* $f'(x)$.
b) En déduire que $2\sqrt{x^2+1}f'(x) + f(x) = 0$.
c) En déduire que f *est solution de l'équation différentielle :*

$$4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0.$$

d) Quel est le développement limité de f *à l'ordre 2 à l'origine ?*

Exercice 2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\dfrac{x+2020}{x+10}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} = ?$

Exercice 3. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ *une fonction continue. Si* f *est dérivable sur* $]a,b[$ *et vérifie* $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$, *montrer qu'il existe* $c \in]a,b[$ *vérifiant* $cf'(c) = f(c)$.

Exercice 4. *A l'aide de théorèmes du cours correctement énoncés et appliqués, montrer que pour tout* $x > 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$: $\quad 1 + xe^x > e^x > \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *et* $e^x - 1 - x < x^2e^x$.

Exercice 5. $\displaystyle\lim_{x\to 7} (8-x)^{\frac{1}{x-7}} = ?$

Exercice 6. *a) Développement limite à l'ordre 6, à l'origine de* $x \mapsto x^2\log(1+\sin^2(x)) - x^4$.
b) Développement limite à l'ordre 6, à l'origine de $x \mapsto (1-\cos(x))^3$.
c) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\log(1+\sin^2(x)) - x^4}{(1-\cos(x))^3}$.

N'oubliez pas non plus de remplir la page « Questions de Cours » et de la joindre à votre copie.

Questions de Cours.

Nom & prénom :

1. Développements limités : completez...

$$
\begin{aligned}
e^x &= && + x^n\varepsilon(x).\\
\sin(x) &= && + x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\cos(x) &= && + x^{2n+1}\varepsilon(x).\\
\mathrm{sh}(x) &= && + x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\mathrm{ch}(x) &= && + x^{2n+1}\varepsilon(x).\\
(1+x)^\alpha &= && + x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{1-x} &= && + x^n\varepsilon(x).\\
\log(1+x) &= && + x^n\varepsilon(x)\\
-\log(1-x) &= && + x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

2. Enoncez ci-dessous le théorème des accroissements finis.

3. Enoncez ci-dessous la formule de Taylor-Young.