Fonctions d'une Variable Réelle, Dérivation – Feuille 5.

Dernières semaines : dérivation, révisions.

Exercice 1. *Utilisez Taylor-Lagrange pour donner une valeur approchée à* 10^{-8} *près de* $\log(1,003)$.

Exercice 2. *Quel est le développement limité à l'ordre 100 à l'origine de* $f(x) = \log\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 3. *Soit* $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ *deux fois dérivable à dérivée seconde* $f'' \geq 0$. *Si* $f(1) = f(2) = 4$ *quel est le signe de* $f'(3)$ *?*

Exercice 4. *Montrer que le polynôme* P_n *défini par* $P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$ *est un polynôme de degré* n *dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à* $[-1,1]$.

Exercice 5. *Étant donné* α *dans* $]0,1[$, *montrer que pour tout entier naturel* n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \geqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.

Exercice 6. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp((n+1)x) - 1}{\exp x - 1}, & si \;\; x \in \mathbb{R}^\star, \\ n+1 & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f *admet un développement limité à l'ordre 3 à l'origine et en déduire la valeur des sommes* $\sum_{k=0}^{n} k^i$, $i = 0,1,2,3$.

Exercice 7. *Soit* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ *; si* f *et* f'' *sont bornées sur* $\mathbb{R}$, *montrer que* f' *est bornée sur* $\mathbb{R}$ *et que l'on a* $M_1 \leq \sqrt{M_0 M_2}$ *où* $M_i := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$, $(i = 0,1,2)$ *(il s'agit des premières inégalités de Kolmogorov, indic : appliquer Taylor-Lagrange sur* $[x-h,x]$ *puis* $[x,x+h]$*...).*

Exercice 8. *Montrer que* $\int_0^1 \frac{(1-t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\log(2)}{2}$ *en appliquant convenablement la formule de Taylor avec reste intégral à* $f(x) = \log(1+x^2)$.

Exercice 9. *Déterminer de trois manières différentes le développement limité à l'ordre deux de* $f(x) = arctan\sqrt{x}$ *au point* $x = 2$.
f *admet-elle un développement limité à l'origine ? si oui, quel est son ordre maximum ?*

Exercice 10. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = xe^{x^2}$. *Montrer que* f *admet une application réciproque définie sur* $\mathbb{R}$ *et déterminer son développement limité à l'ordre 5 à l'origine.*

15 décembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr

I.N.P. **Janvier 2010**

☯ ☢ ☯ Dérivation – Devoir 6. ☯ ☢ ☯

A rédiger pour le premier Td de l'année 2010.

Exercice 11. *Soit* $f(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$*, montrer qu'au voisinage de* $+\infty$ *la courbe de* f *admet une asymptote et preciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.*

Exercice 12. *Soit* $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable à l'origine, si* $f(0) = 0$ *déterminer pour* $k \in \mathbb{N}$ *la limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Exercice 13. *Soit* $f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ *deux fois continuement dérivable, si* $f(0) = f(1) = 0$ *montrer que* $|f'(x)| \leq A/2,\ x \in [0,1]$ *où* $A = \sup_{t\in[0,1]} |f''(t)|$*...).*

15 décembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr