☯ ☢ ☯ **Fonctions d'une Variable Réelle, Dérivation – Feuille 4.** ☯ ☢ ☯

`Semaine 5 : Formules de Taylor & Développements limités (2).`

Exercice 1. *Montrer que*

$$1) \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3},$$

$$2) \quad \lim_{x\to 2_+}\left(2^x+3^x-12\right)^{\tan(\pi x/4)}=\exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2)+9\log(3)\right)\right],$$

$$3) \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{t}})-\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2-\mathrm{t}})}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t^2}-\frac{t^6}{6}\log^2(t)}=\frac{e-1}{2},$$

$$4) \quad \lim_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}=1,$$

$$5) \quad \lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)}=e^{-1},$$

$$6) \quad \lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}^2+1}\right)}{x-1}=1,$$

$$7) \quad \lim_{x\to 0_+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin(1/x)\right)^x=1.$$

Exercice 2. *Soient* $0<a<b$*, pour* $x\in\mathbb{R}^\star$ *on pose* $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x^2}$.

1) Montrer que f *se prolonge à l'origine en une fonction dérivable.*
2) Montrer que $f(x)f(-x)=ab$.
3) Etudier et representer soigneusement f *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Etudier et representer soigneusement* $f(x)=\log\left(2-e^{-1/x}\right)$ *sur son domaine de définition.*

Exercice 4. *Soit* $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+3x^2+...+2009x^{2010}}$*, que vaut* $f^{(2010)}(0)$ *? (commencez par écrire plus simplement* f *pour en déduire facilement un développement limité à l'ordre* 2010 *à l'origine...).*

Exercice 5. *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\log(2)}-\dfrac{1}{2^x-1} & si\ \ x\in\mathbb{R}^\star,\\ a & si\ \ x=0.\end{cases}$$

Comment choisir $a\in\mathbb{R}$ *pour que* f *soit continue à l'origine ?* f *ainsi prolongée est-elle dérivable à l'origine ?*

Exercice 6. *Soit* $f\in\mathscr{C}^3([0,1])$ *telle que* $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'(1)=f''(1)=0$ *et* $f(1)=1$. *Montrer qu'il existe* $0<c<1$ *tel que* $f^{(3)}(c)\geq 24$.

Exercice 7. *Calculer d'au moins trois manières différentes le développement limité à l'ordre* 3 *à l'origine de la fonction tangente*

Exercice 8. $C(\alpha)$ *désignant le coefficient* x^{2009} *dans le DL à l'origine et à un ordre convenable de* $(1+x)^\alpha$ *calculer*

$$\int_0^1 C(-t-1)\Big(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}\cdots+\frac{1}{t+2009}\Big)dt.$$

Exercice 9. *Montrer que*

$$\begin{aligned}
&1)\quad \lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{1-x+\log(x)}=-2,\\
&2)\quad \lim_{x\to0_+}\frac{x^x-(\sin x)^{\sin x}}{x^3}=-\infty,\\
&3)\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{\arctan^3(\mathrm{x})}\left(\log(\log(e+x))-\frac{x}{x+e}\right)=\frac{1}{6e^3},\\
&4)\quad \lim_{x\to e}\frac{e^x-x^e}{\log(x)-\log_x(e)}=0,\\
&5)\quad \lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan(\mathrm{x})-\frac{\pi\mathrm{x}+1}{2\mathrm{x}+1}\right)=\frac{\pi-6}{4},\\
&6)\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/\sin(x)}=1,\\
&7)\quad \lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{e}{8},\\
&8)\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2(x)}\right)^x=\frac{2}{3},\\
&9)\quad \lim_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}-\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}\right)=\frac{15e^{3/2}}{8},\\
&10)\quad \lim_{x\to+\pi/2_+}\cos(x)\exp\frac{1}{1-\sin(x)}=-\infty,\\
&11)\quad \lim_{x\to1}\left(4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)-x\right)^{1/(1-x)}=\exp(1-\pi/\sqrt{3}),\\
&12)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log(x+1)}{\log(x)}\right)^{x\log(x)}=e,\\
&13)\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{x}\right)^{\mathrm{argsh(x)/(sh(x)-x)}}=e,\\
&13)\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+2x+2x^2)}{\log(1+2x+3x^2)}\right)^{1/(e^x-1)}=1/\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

I.N.P. **Novembre 2009**

☯ ☢ ☯ Dérivation – Devoir 5. ☯ ☢ ☯

`A rédiger pour le Vendredi 18 décembre.`

Exercice 10. *Pour* $a > 0$ *et* $a \neq 1$ *calculer* $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right)^{1/x}$.

Exercice 11. $\lim_{x \to 0_+} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{1/x} - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{1/x^2} =$ *?*

4 décembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr