I.N.P. **Novembre 2009**

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle, Dérivation – Feuille 3. ☯ ☢ ☯

`Semaine 3 & 4 : Formules de Taylor & Développements limités (1).`

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que f est constante.*

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ montrer que :*
1) si $f(0) = 1, f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$ alors $\lim_{x\to\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{-a^2/2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) si $f(0) = 0$ alors $\lim_{x\to 0_+} \sum_{k=1}^{[1/\sqrt{x}]} f(kx) = \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 3. *Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que le millième chiffre aprés la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $N = 111\ldots111 = (10^{1998} - 1)/9$ vaut 1.*

Exercice 4. *0) On définit la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y,\ y(0) = 1$. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour montrer que $5/2 < e := y(1) < 3$ puis $e \notin \mathbb{Q}$*

1) Appliquer convenablement la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto e^x := \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ pour en déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

2) En appliquant convenablement la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto e^{-x}$, montrer que pour $n \geq 3$ l'entier le plus proche de $n!/e$ est $n! \sum_0^n (-1)^k/k!$ et est divisible par $n - 1$.

Exercice 5. *Soit $f \in \mathscr{C}^2([-a, a])$, si $f(0) = 0$ montrer que la suite définie pour $n > a^{-1}$ par*

$$u_n = f(n^{-2}) + f(2n^{-2}) + \cdots + f(n^{-1})$$

converge et préciser sa limite.

Exercice 6. *Calculez les limites suivantes*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} \right), \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sin(k/n)\sin(k/n^2).$$

Exercice 7. *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable et telle que $f(-1) = f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f''(c) \geq 3$.*

Exercice 8. *1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que f est continue à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 à l'origine ; montrer que f est dérivable à l'origine si, et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 à l'origine.*
2) Soit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tous points de $\mathbb{R}^\star$, qu'elle est continue et dérivable à l'origine et nulle part deux fois dérivable. Toutefois montrer que f admet à l'origine un développement limité à tout ordre.

Exercice 9. *1) Montrer que le DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = x/\sin(x)$ *est* $1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$.
2) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = 1/\cos(x)$ *est* $1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$.
3) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\sin(x)/x)$ *est* $e(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$.
4) Calculer le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 7 *de* $f(x) = \cos(x)$.
5) Calculer le DL à l'ordre 6 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log(\cos(x))$.
6) Calculer le DL à l'ordre 6 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
7) Calculer le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 2 *de* $f(x) = \arctan\sqrt{x}$.
8) Calculer le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 2π *de* $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 5\pi^2}$.
9) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de*$f(x) = \log\left(3e^x + e^{-x}\right)$ *est* $2\log(2) + x/2 + 3x^2/8 - x^3/8 + o(x^3)$.
10) Montrer que le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$ *est* $\log(3) + 5x/12 - 53x^2/576 + o(x^2)$.
11) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$ *est* $\log(2) - x^2/8 - 3x^4/64 + o(x^4)$.
12) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \log\left(\log(e+x)\right)$ *est* $x/e - x^2/e^2 + 7x^3/6e^3 + o(x^3)$.
13) Donner un DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (ch(x))^{1/x^2}$ *est* $\sqrt{e} - \sqrt{e^2}x^2/12 + o(x^2)$.
14) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$ *est* $x/\sqrt{e} - x^2/12\sqrt{e} + o(x^3)$.
15) Montrer que le DL à l'ordre 1 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \sqrt{a + \sqrt{b+x}},\ a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ *est* $\sqrt{a+\sqrt{b}} + x\left(4\sqrt{b}\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^{-1} + o(x)$.
16) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 1 *de* $f(x) = x^{-2}\log(1+x)$ *est* $\log 2 + (1/2 - 2\log 2)(x-1) + (3\log 2 - 9/8)(x-1)^2 + (43/24 - 4\log 2)(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
17) Montrer que le DL à l'ordre 7 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\cos(x))$ *est* $e\left(1 - x^2/2 + x^4/6 - 31x^6/720\right) + o(x^6)$.
18) Montrer que le à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$ *est* $(\cos(x))^{\sin(x)} = 1 - x^3/2 + o(x^5)$.

26 novembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr

I.N.P. **Novembre 2009**

☯ ☢ ☯ Dérivation – Devoir 3. ☯ ☢ ☯

`A rédiger pour le lundi 30 novembre.`

Exercice 10. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ *vérifiant* $f' = f \circ f$

a) Montrer que $f'(x) > f(0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $f(x) < (1+x)f(0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star$, *conclurion ?*

Exercice 11. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable au point* $a \in \mathbb{R}$, *déterminer la limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}.$$

26 novembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr