◕ ☢ ◕ Fonctions d'une Variable Réelle, Dérivation – Feuille 2. ◕ ☢ ◕

`Semaine 2 : Rolle et les accroissements finis.`

Exercice 1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application dérivable vérifiant* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *; en considérant* $g(x) = f(\tan x)$*, montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Exercice 2. *1) Soient* $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ *et*$P(x) = x^n + ax + b$. *Montrer que si* n *est pair* P *a au plus deux racines réelles distinctes, et au plus trois si* n *est impair.*

2) Montrer que si toutes les racines d'un polynôme P *de degré* $d \geq 2$ *sont réelles, alors il en est de même pour les racines de* P'.

3) Montrer que le polynôme $P(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$ *admet une unique racine réelle.*

Exercice 3. *En appliquant le théorème des accroissements finis à* $x \mapsto \log(1+x)$ *sur les segments* $[0, x/q]$ *et* $[x/q, x/p]$*, montrer que pour* $0 < p < q$ *:*

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q, \quad \forall\, x > 0.$$

Exercice 4. *Montrer que* $e^x \geq 1+x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. *En « déduire » l'inégalité arithmético-géométrique*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} := G_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ a_1, a_2 \ldots, a_n \geq 0,$$

et préciser le cas d'égalité (appliquer l'inégalité à $x = -1 + a_i/A_n,\ 1 \leq i \leq n$*...).*

Exercice 5. *Montrer que* $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \quad \forall\, x \in [0, \pi/2]$*, et représenter graphiquement cette inégalité (pour la première inégalité on pourra par exemple montrer que pour tout* $0 < x < \pi/2$*,il existe* $0 < \theta < x$ *tel que* $\sin(x)/x = \cos(\theta)$ *pour en déduire que la fonction* $f(x) = \sin(x)/x,\ x \in]0, \pi/2],\ f(0) = 1$ *est strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$*...).*

Exercice 6. *Appliquer le théorème des accroissements finis à* $x \mapsto \log(x)$ *sur des intervalles convenables pour en déduire la limite de la suite* $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Exercice 7. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*

$f(0) = 0 \quad \& \quad \exists\, c > 0 : |f'(x)| \leq c|f(x)|$. *Avec le théorème de accroissements finis, montrer que pour tout* $x \in]0, c^{-1}[\cap[0,1]$ *:* $|f'(x)| \leq (cx)^n \|f\|$. *Conclusion ?*

Exercice 8. *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ *vérifiant* $f' = f \circ f$

a) Montrer que $f'(x) > f(0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $f(x) < (1+x)f(0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}_-^\star$ *et conclure.*

Exercice 9. *On veut calculer* $\lambda := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

a) Justifier l'existence de λ.

b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *dérivable, si* $f(0) = 0$ *montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = \lambda f'(0).$$

c) En considérant $f(x) = \log(1+x)$*, montrer que* $\lambda = \log(2)$. *(bonus : trouver une preuve plus simple avec les sommes de Riemann (intégration)).*

11 novembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr

I.N.P. **Novembre 2009**

☯ ☢ ☯ Dérivation – Devoir 2. ☯ ☢ ☯

`A rédiger pour le lundi 23 novembre.`

Exercice 10. *Démontrer la formule de Leibnitz : soient $n \geq 1$, $f, g \ : \ I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Exercice 11. *Etude et représentation graphique sur son domaine de définition de $f(x) = \cos(x)\exp(\tan(x))$.*

Exercice 12. *Montrer que*

$$\left(arccos \sqrt{\frac{\cos(3x)}{\cos^3(x)}} \right)' = \left(\sqrt{\frac{3}{\cos(x)\cos(3x)}} \right)'.$$

11 novembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr