I.N.P. **Septembre 2009**

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle, Dérivation – Feuille 1. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\begin{cases} arctan(x), & si\ \ |x|\leq 1\\ \frac{\pi}{2}\,signe(x)+\frac{x-1}{2}, & si\ \ |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & si\ \ |x|\leq 1,\\ e^{-1}, & si\ \ |x|>1.\end{cases}$$

Exercice 2. *Déterminer pour quelles constantes $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x)=\begin{cases} 4x, & si\ \ x\leq 0,\\ ax^2+bx+c, & si\ \ 0<x<1,\\ 3-2x, & si\ \ x\geq 1.\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases} ax+b, & si\ \ x\leq 0,\\ cx^2+dx, & si\ \ 0<x\leq 1,\\ 1-\frac{1}{x}, & si\ \ x>1.\end{cases}$$

Exercice 3. *Soit $p\geq 1$, étudier les variations sur $[0,1]$ de $f(x)=\frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ et en déduire*

$$|a|^p+|b|^p\leq(|a|+|b|)^p\leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p),\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4. *Montrer que $\log(x)<x/e,\ \forall\, x>0,\ x\neq e$. Lequel des deux réels e^π et π^e est le plus grand ?*

Exercice 5. *a) Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto x^n(1-x)^n$. En comparant deux expressions différentes du coefficient de x^n en déduire que $\sum_{k=0}^n\left(C_n^k\right)^2=\frac{(2n)!}{n!^2}$ (Bonus : donner une preuve « combinatoire » de ce dernier résultat).*
b) Retrouver le résultat de la question précédente en calculant la dérivée n-ième de $x\mapsto x^{2n}$.
c) Calculer pour $0\leq k\leq n$ les dérivées $(x^n)^{(k)}$ et $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)}$; en déduire $\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(k)}$.
d) Montrer que $\left(x^{n-1}\log(1+x)\right)^{(n)}=(n-1)!\sum_{k=1}^n\frac{1}{(1+x)^k}$.

Exercice 6. *A l'aide de la fonction auxiliaire $g(x)=e^x(f(x)-1)$, déterminer*

$$\sup\{f(1),\ f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \textit{dérivable et vérifiant}\ \ :f(0)=0\ \&\ f(x)+f'(x)\leq 1,\ x\in\mathbb{R}\ \}.$$

Exercice 7. *Montrer que pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+$ on a $x^y+y^x>1$ (méthode : on peut se restreindre à $x,y\in]0,1[$ puis écrire $y=tx,\ t\in[0,1]$...).*

Exercice 8. *Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}e^{kx}=(e^x-1)^{2n}$. et « en déduire » la valeur de $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}k^n$.*

Exercice 9. *Soit $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $a\in\mathbb{R}$, déterminer la limite*

$$\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}.$$

4 novembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr

I.N.P. **Novembre 2009**

☯ ☢ ☯ Dérivation – Devoir 1. ☯ ☢ ☯

A rédiger pour le vendredi 12 novembre.

Exercice 10. *Etudier la dérivabilité de la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} arctan(|x|^{-1}), & si \;\; x \neq 0, \\ 0, & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

Exercice 11. *Déterminer pour quelles constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & si \;\; x \leq 1, \\ ax^2 + c, & si \;\; 1 < x \leq 2, \\ \frac{dx^2+1}{x}, & si \;\; x > 2. \end{cases}$$

Exercice 12. *Soient $a > b$ deux réels, aprés avoir précisé son domaine de définition calculer la dérivée de*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} arccos\left(\frac{a\cos(x) + b}{a + b\cos(x)}\right) - \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} arctan\sqrt{\frac{a - b}{a + b}\tan(x/2)}$$

et en déduire une expression bien plus simple de f.

4 novembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr