Feuille 2 - Exercice 4 : • $\boxed{\lim_{x\to 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = ?}$ ~~Solution~~ : $\frac{1}{x}-1 \le E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Soit $(x>0)$ $1-x \le xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1$, $\forall x>0$ $\Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$

et $(x<0)$ $1 \le xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1-x$

• $\boxed{\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\, E(1/x) = ?}$ Vu ce qui précède on a pour tout $x>0$:

$\frac{1}{\sqrt{x}}-1 \le \sqrt{x}\, E(1/x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ et toujours par les gendarmes la limite est $\underline{+\infty}$

• $\lim_{x\to +0} x^2\left[1+2+\dots+E\left(\frac{1}{x}\right)\right] = ?$: Si $x\to 0$, $1/x \to +\infty$ et $E(1/x)$ est un entier donc (formule classique : $1+2+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$) on aura :

va la première limite

$x^2(1+2+\dots+E(1/x)) = x^2\,\frac{E(1/x)}{2}\,[E(1/x)+1] = \frac{xE(1/x)}{2}\,[xE(1/x)+x] \to \frac{1}{2}$

Feuille 1 - Exercice 2 : • Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \le \frac{1}{2\sqrt{n}} \le \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{car } \sqrt{n+1}\ge\sqrt{n}$$

De même

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{car } \sqrt{n}\ge\sqrt{n-1} : \underline{\text{CQFD}}.$$

• Sommons ces inégalités de $n=1$ à N :

$$\sqrt{2}-\sqrt{1} \le \frac{1}{2\sqrt{1}} \le \sqrt{1}-\sqrt{0}$$
$$\sqrt{3}-\sqrt{2} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \le \sqrt{2}-\sqrt{1}$$
$$\sqrt{N+1}-\sqrt{N} \le \frac{1}{2\sqrt{N}} \le \sqrt{N}-\sqrt{N-1}$$

on tire par télescopage :

$$\sqrt{N+1}-\sqrt{1} \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{N}}\right] \le \sqrt{N}$$

~~On trouve~~ : En particulier si $N=10000$ on aura

$$\underbrace{\sqrt{10000+1}}_{>99} - 1 \le \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{N}}\right] \le \sqrt{10000} = 100$$

$$\Rightarrow \boxed{E\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{10000}}\right] = 99} \quad \underline{\text{CQFD}}$$

Feuille 3 - Exercice 3 : Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x/2)}{x}=0$

Il s'agit de montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ autrement dit $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tel que $|x|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \varepsilon$. Traduisons les hypothèses :

(1) $\lim_{x\to 0} f(x)=0 \iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0 : |x|<\delta \Rightarrow |f(x)|\le\varepsilon$..

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x)-f(x/2))=0 \iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0 : |x|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \varepsilon.x$

Soit donc $\varepsilon>0$ et $0<x<\delta$, alors $0<\frac{x}{2}<x<\delta$ et (2) nous donne $|f(x/2)-f(x/4)| < \varepsilon\frac{x}{2}$ de même $|f(x/2^{n-1})-f(x/2^n)| \le \varepsilon\frac{x}{2^{n-1}}$ $\forall n\ge 1$

pour tout $1\le n\le m$:

Alors

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^m}\right)\right| \le \left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)\right| + \dots + \left|f\left(\frac{x}{2^{m-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^m}\right)\right|$$
$$\le \varepsilon x + \varepsilon\frac{x}{2} + \dots + \varepsilon\frac{x}{2^{m-1}} = \varepsilon x\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}}\right] = \varepsilon x\, 2(1-2^{-m})$$

et ceci $\forall m\in\mathbb{N}$, si on fait tendre m vers $+\infty$ les inégalités se conservent :

$$\lim_{m\to\infty}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^m}\right)\right| \le \lim_{m\to\infty} 2\varepsilon x(1-2^{-m}) = 2\varepsilon x$$

$\|$

$|f(x)|$ car $\frac{x}{2^m}\to 0$ & $\lim_0 f(x)=0$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{En résumé : } \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : 0<x<\delta \Rightarrow |f(x)| < 2\varepsilon x \text{ ie } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<x<\delta \\ \Rightarrow |f(x)/x| < 2\varepsilon \iff \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \ \underline{\text{CQFD}}\end{array}}$

Exercices 1 à 2 feuille 4.

1) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \quad a>1}$ On prend le log : $\log\left(\frac{a^x}{x}\right) = x\log(a) - \log(x)$

$$= x\left(\log(a) - \frac{\log(x)}{x}\right) \xrightarrow[\log a > 0]{} +\infty.$$

2) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty,\ a>1,\ \alpha\in\mathbb{R}}$ C'est donc vrai pour $\alpha = 1$ et trivial pour tout $\alpha \le 0$

Si $\alpha > 0$ on écrit $\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha$ où $b = a^{1/\alpha}$ et on applique (1).

3) $\boxed{\lim_{\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$ La dérivabilité de log en 1 donne $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ soit en prenant l'ex $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ les autres suivent par changement de variable.

4) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ?\ (a>0)}$ On peut invoquer un banal taux d'accroissement de $x\mapsto a^x$ en $x=0$ et trouver $\log(a)$. Plus sportif : posons $y = a^x - 1 \to 0$ ie $a^x = 1+y$, $x = \log(1+y)/\log a$ et $\frac{a^x-1}{x} = \underbrace{\frac{y}{\log(1+y)}}_{\to 1}\cdot\log(a) \xrightarrow[y\to 0]{} \log(a)$

5) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = ?\ \alpha\in\mathbb{R}}$ Même remarque qu'au dessus.

Sinon on pose aussi $y = (1+x)^\alpha - 1$ alors $x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$ et $\log(1+x) = \frac{\log(1+y)}{\alpha}$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)}\cdot\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\to 1}$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)} = \frac{y}{\log(1+y)}\cdot\alpha \xrightarrow[y\to 0]{} \alpha$$

6) $\boxed{\lim_{x\to 0+} x^{\sin(x)} = ?}$ $\quad x^{\sin(x)} = \exp \sin(x)\cdot\log(x) = \exp\left[\underbrace{\frac{\sin X}{X}}_{\to 1}\cdot\underbrace{X\log X}_{\to 0}\right] \to 1$

7) $\boxed{\lim_{+\infty}(\log(x))^{1/x} = ?}$ $\quad \log\left(\left[\log(x)\right]^{1/x}\right) = \frac{\log(\log x)}{\log(x)}\cdot\frac{\log(x)}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

et la limite est donc zéro.

8) $\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x} = ?}$ $\quad \log\left((\cos x)^{1/\sin^2 x}\right) = \frac{\log\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\log\cos x}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

$$= \frac{\log(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1}\cdot\frac{-2\sin^2(x/2)}{\sin^2(x)} \longrightarrow -\frac{1}{2} : \text{la limite est } e^{-1/2}$$

9) $\boxed{\lim_{x\to\infty}(e^x - 1)^{1/x} = ?}$

$\hookrightarrow e^x - 1 \le e^x$ et $e^x - 1 \ge e^x - \frac{e^x}{2} = \frac{e^x}{2}$: $\frac{e^x}{2} \le e^x - 1 \le e^x$

soit $\frac{e}{2^{1/x}} \le (e^x - 1)^{1/x} \le e \Longrightarrow \lim(e^x - 1)^{1/x} = e$

$2^{1/x} \to 1$

10) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{\tan(x^2)} = ?}$ $\quad \frac{\log\cos x}{\tan(x^2)} = \frac{1}{2}\frac{\log\cos^2 x}{\tan x^2} \simeq \frac{1}{2}\frac{\log(1-\sin^2 x)}{\tan^2 x} \simeq \frac{1}{2}\frac{\log(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

$\boxed{11)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(\tan x^2)))}{\cancel{\tan x^2}\, x^2} = ?}$ Comme $\frac{\sin u}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ on a : $\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^2}$

$$\frac{\sin(\sin(\sin(\tan x^2)))}{\cancel{\tan(x^2)}\, x^2} = \frac{\sin(\sin(\sin(\tan x^2)))}{\sin(\sin(\tan x^2))}\cdot\frac{\sin(\sin(\tan x^2))}{\sin(\tan x^2)}\cdot\frac{\sin\tan x^2}{\tan x^2}\cdot\frac{\tan x^2}{x^2}$$

et le tout tends vers 1

$\boxed{12)\ \lim_{x\to 0+} \frac{(1-e^{-x})^{1/2}-(1-\cos x)^{1/2}}{\sqrt{\sin x}} = ?}$

$$\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\sqrt{\frac{1-e^{-x}}{x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x}}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}$$

et $\lim_{0+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1$, $\lim_{0+}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{0+}\frac{2\sin^2 x/2}{x} = 0$ et enfin $\lim_{0+}\frac{1-e^{-x}}{x} = 1$. En résumé la limite vaut 1.

Exercice 6 - Feuille 4: (a) f est continue, non constante et périodique : montrons que f admet une plus petite période strictement positive. Sinon il existe (pourquoi?) une suite $(T_n)_n$ de périodes strictement positives de f telle que $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$.
Soit alors $x_0\in\mathbb{R}$, f étant continue, pour tout $\varepsilon>0$, $\exists\, \eta_\varepsilon : |x-x_0|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
Mais $\lim T_n = 0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N} : 0 < T_{n_0} < \delta/2$ et par suite l'un au moins des réels $(kT_{n_0})_{k\in\mathbb{Z}}$ est dans l'intervalle $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, pour un tel $k\in\mathbb{N}$ nous aurons donc $|f(x_0)-f(kT_{n_0})|<\varepsilon$ mais (T_{n_0} est une période) alors $|f(x_0)-f(0)|<\varepsilon$. En résumé nous avons pour tout $\varepsilon>0$ et $x_0\in\mathbb{R}$: $|f(x_0)-f(0)|<\varepsilon$ $\forall x_0\in\mathbb{R}$: f est bien constante
ie $f(x_0)=f(0)$ $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

(f) L'ensemble des périodes de la fonction $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est $\mathbb{Q}$: elle n'admet donc pas de période fondamentale.

Exercice 5 - Feuille 4: $f\in C^0(\mathbb{R})$ et vérifie $f(2x+1)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (☆)

(1) Soit $t\in\mathbb{R}$, remplaçons x par $\frac{t-1}{2}$ dans la formule précédente : $f(x)=f\left(\frac{t-1}{2}\right)=f(2x+1)=f\left(2\cdot\frac{t-1}{2}+1\right)=f(t)$. CQFD

(2) $t\in\mathbb{R}$, $u_0=t$ et $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{2}$ $(n\geq 1)$.

(a) Si $\lim_n u_n = a$, alors $a = \lim_n u_{n+1} = \lim \frac{u_n-1}{2} = \frac{a-1}{2}$ ($u\mapsto\frac{u-1}{2}$ est continue en a) ie $a=\frac{a-1}{2} \Rightarrow a=-1$. CQFD.

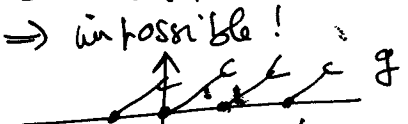
(b) On pose $v_n = 1+u_n$ soit $v_{n+1} = 1+u_{n+1} = 1+\frac{u_n-1}{2} = \frac{1}{2}(u_n+1) = \frac{v_n}{2}$ c'est donc bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}\in]0,1[$ elle est donc convergente vers 0 et par suite $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(v_n-1) = -1$

(c) On a vu en (a) que pour tout réel t : $f(t)=f\left(\frac{t-1}{2}\right)$ soit $f(u_0)=f(u_1)$. Alors toujours vu (a) $f(u_0)=f(u_n)=f\left(\frac{u_n-1}{2}\right)=f(u_{n+1})$

HR : $f(t)=f(u_0)=f(u_n)$. Maintenant

Conclusion $\forall t\in\mathbb{R}$: $f(t)=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Bonus: Deux fonctions périodiques dont la somme n'est pas périodique :
On considère $f(x)=\sin(x)$ et $g(x)=x-E(x)$ $x\in\mathbb{R}$. Alors f est périodique de période 2π, g est périodique de période 1. Si $h=f+g$ étant périodique de période $T>0$ alors $h(T)=0=h(-T)$ ie $\sin(T)+T-E(T) = -\sin(T)-T-E(-T)=0$
$\sin(T)+T+E(-T)\neq 0 \Rightarrow E(T)+E(-T)=0 \Rightarrow$ impossible !
soit $\sin(T)+T-E(T)=0$ & $\Rightarrow T\in\mathbb{N}$ ce qui est absurde car $T\in\mathbb{N} \Rightarrow \sin T = 0 \Rightarrow T-E(T)=0$



Ici g n'est pas continue en $\mathbb{Z}$, mais avec un peu plus d'efforts on peut prouver que • si f & g continues, périodiques $\exists\, T_f/T_g\notin\mathbb{Q}$ alors $h=f+g$ non périodique • si $f\in C(\mathbb{R})$ l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ de la forme $a\mathbb{Z}$ si $f\neq 0$ et dense sinon.

Exercice 1 - Feuille 6 : • UC de $f(x)=\log(x)$ sur $]0,1]$, f est continue sur $]0,1]$ l'éventuel problème viendra de 0 et si $x_n = e^{-n}$ on vérifie sans peine que $\lim_{\infty} x_n = 0$ et $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = 1$: il ne peut donc y avoir UC sur $]0,1]$.

• UC de $f(x) = \text{cotan}(x) = \cos x / \sin x$ sur $]0,1]$: f est continue sur $]0,1]$. Considérons la suite $(x_n)_n \subset]0,1]$ définie par $x_n = 1/n$, $n \geq 1$ alors $\lim_n x_n = 0$ et $|f(x_{2n+1}) - f(x_{2n})| = \left|\frac{\cos(1/2n+1)}{\sin(1/2n+1)} - \frac{\cos(1/2n)}{\sin(1/2n)}\right| =$

$$= \left|\frac{\cos(1/2n+1)\sin(1/2n) - \cos(1/2n)\sin(1/2n+1)}{\sin(1/2n+1)\sin(1/2n)}\right| = \left|\frac{\sin(1/2n - 1/2n+1)}{\sin(1/2n)\sin(1/2n+1)}\right|$$

$$= \left|\frac{\sin(1/2n(2n+1))}{\sin(1/2n)\sin(1/2n+1)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \left(\frac{\sin u}{u} \xrightarrow[0]{} 1\right)$$

La continuité ne peut donc être uniforme sur $]0,1]$.

• UC de $f(x) = e^x \cos(1/x)$ sur $]0,1]$. Encore une fois il n'y a pas UC sur $]0,1]$ pour cela il suffit de considérer la suite $x_n = 1/n\pi$, $n \geq 1$ elle cv vers 0 et $|f(x_{2n}) - f(x_{2n+1})| = |e^{1/2n\pi} + e^{1/(2n+1)\pi}| \geq 2$ CQFD.

• UC de $f(x)=\sqrt{x}$ sur $[0,\infty[$. Pour cela montrons que $\forall a,b \in \mathbb{R}^+$ on a $|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$. Sans perdre de généralité on suppose $a \geq b \geq 0$ de sorte que l'inégalité équivaut à $0 \leq \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a-b})^2$ ie $a+b-2\sqrt{ab} \leq a-b$. Or $a \geq b \geq 0$ implique que $a+b-2\sqrt{ab} \leq a+b-2\sqrt{bb} = a+b-2b = a-b$ CQFD. Par conséquent pour tous $x,y \in \mathbb{R}^+$ on a $|f(x)-f(y)| \leq \sqrt{|x-y|}$ soit $\forall \varepsilon > 0$ si on pose $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$: $|x-y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$: f est donc bien UC sur $\mathbb{R}^+$.

• UC sur $\mathbb{R}^+$ de $f(x) = e^x$. f semble tendre trop rapidement vers $+\infty$ pour être UC sur $\mathbb{R}^+$. Pour s'en convaincre proprement il suffit de considérer la suite $x_n = \log(n) \to +\infty$, on a $x_{n+1} - x_n = \log(n+1) - \log(n) = \log(1+\frac{1}{n}) \to 0$ mais $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = 1$: il n'y a donc pas UCV sur $\mathbb{R}^+$ pour f.

• UC sur $\mathbb{R}^+$ de $f(x) = x\sin(x)$: Une fois de plus $f \in C^0(\mathbb{R}^+)$, si elle n'est pas UC sur $\mathbb{R}^+$ ce sera à cause de son comportement en $+\infty$, vu la déf. de f considérons la suite $x_n = 2n\pi \to \infty$ $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n} \to \infty$. Alors $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ et $|f(x_n)-f(y_n)| = |2n\pi\sin(2n\pi) - (2n\pi+\frac{1}{n})\sin(2n\pi+\frac{1}{n})|$

$$= (2n\pi + \tfrac{1}{n})\sin(\tfrac{1}{n}) = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \cdot \frac{1}{n}(2n\pi+\tfrac{1}{n}) = \frac{\sin(1/n)}{1/n}\left(2\pi + \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow 2\pi$$

Comme $|x_n - y_n| \to 0$ f ne peut être UC sur $\mathbb{R}^+$.

• $f(x) = \sin^2(x)$: f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et périodique d'après l'exercice 5 de la même feuille elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. On peut aussi montrer que $|f(x)-f(y)| = |\sin^2 x - \sin^2 y| \leq 2|x-y|$ (*) qui assure l'UC sur $\mathbb{R}^+$.

• $f(x) = \sin(x^2)$: Posons $x_n = \sqrt{2n\pi}$ $y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, alors $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ mais $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: f ne peut être UC sur $\mathbb{R}^+$.

• $f(x) = \sin(\sqrt{x})$: Avec l'inégalité bien connue : $|\sin u| \leq |u|$ on tire pour $x,y \in \mathbb{R}^+$:

$$|f(x)-f(y)| = |\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{y}| = \left|2\sin\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)\right| \leq |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

← même exercice voir + haut...

$\Rightarrow$ f est UC sur $\mathbb{R}^+$ ($\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon = \varepsilon^2 \Rightarrow \dots$) CQFD

Feuille 6 - Exercice 2 : • On pose $\ell_1 = \lim_{x\to\infty} f(x)$, $\ell_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, on a donc :

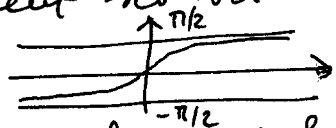
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0 : x>\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell_1|\le\varepsilon$: $\ell_1-\varepsilon \le f(x) \le \ell_1+\varepsilon$

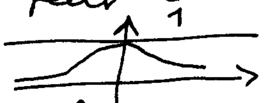
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0 : x<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-\ell_2|\le\varepsilon$: $\ell_2-\varepsilon\le f(x)\le \ell_2+\varepsilon$

f est donc bornée sur $]-\infty,\ell_2]\cup[\ell_1+\infty[$ sur $[\ell_2,\ell_1]$ fermé borné

f étant continue est bornée : f est donc bornée sur $]-\infty,\ell_2]\cup[\ell_1,\infty[\cup[\ell_2,\ell_1]=\mathbb{R}$.

• f n'atteint pas forcément ses bornes comme on peut le voir

avec : $f(x)=\arctan(x)$ 

ou $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 

• On suppose maintenant que $f\in C^0(\mathbb{R})$ & $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x) = 0$

Si $f\equiv 0$ elle atteint ses extrémas, si $f\not\equiv 0$ $\exists a\in\mathbb{R}$: $f(a)\neq 0$ disons par exemple $f(a)>0$. Les hyp. amènent en particulier que

$\exists\delta_1 : x>\delta_1 \Rightarrow |f(x)-0|<f(a)/2$ ie $-f(a)/2\le f(x)\le f(a)/2$

$\exists\delta_2 : x<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-0|<f(a)/2$ sur $]-\infty,\delta_2]\cup[\delta_1,+\infty[$

Ainsi $f\le f(a)/2 < f(a)$ sur $]-\infty,\delta_2]\cup[\delta_1,\infty[\Rightarrow a\in[\ell_2,\ell_1]$

et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup_{[\ell_2,\ell_1]} f(x)$ et ce dernier "sup" est atteint car f est continue et $[\ell_2,\ell_1]$ fermé borné — CQFD

Feuille 6 - Exo3 : On démarre comme dans l'exo précédent : $\lim_{+\infty} f(x)=\ell_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_1>0 : x>\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell_1|<\varepsilon$. En particulier si $x,y>\delta_1$ on aura $|f(x)-f(y)|\le|f(x)-\ell_1|+|\ell_1-f(y)|\le 2\varepsilon$ ie $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1 : x,y>\delta_1$ $\Rightarrow |f(x)-f(y)|\le 2\varepsilon$: c'est bien plus qu'il ne faut

De même $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2<0 : y,x<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<2\varepsilon$

De plus sur $[\delta_2,\delta_1]$ fermé borné f est UC : $\exists\delta_\varepsilon : |x-y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow$ ($x,y\in[\delta_2,\delta_1]$) $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon\le 2\varepsilon$

En regroupant les trois : $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_\varepsilon : |x-y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le 2\varepsilon$ ie f est UC sur $\mathbb{R}$: CQFD.

Feuille 6 - Exo4 : On a $\lim_{+\infty}\mathrm{Artan}(x)=\pi/2$, $\lim_{+\infty} x\sin(1/x)=1$: ces deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ admettent une limite en $+\infty$, avec l'exo 3 elles sont UC sur $\mathbb{R}^+$

Feuille 6 - Exo5 : • Si f est constante elle est UC sur $\mathbb{R}$, si elle n'est pas constante elle admet une période fondamentale $T>0$ (voir la feuille 4). Elle est donc UC sur tout intervalle de la forme $[kT,(k+1)T]$ $(k\in\mathbb{Z})$ avec (par périodicité) le même η_ε pour $\varepsilon>0$. On en déduit facilement que f est UC sur $\mathbb{R}$

• Par T-périodicité $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = \sup_{[0,T]} f(x)$ et ce dernier est atteint par continuité sur le fermé borné $[0,T]$ (idem pour l'inf).

• Avec la question précédente il existe $\alpha\in\mathbb{R}$: $f(\alpha)=\sup_{\mathbb{R}} f(x)$, $f(\beta)=\inf_{\mathbb{R}} f(x)$

et soit $g(x)=f(x+a)-f(a)$. On a : $g(\alpha-a)=f(\alpha)-f(a)\ge 0$, $g(\beta-a)=f(\beta)-f(a)\le 0$

g étant continue sur $\mathbb{R}$ elle doit (TVI) s'annuler entre $\alpha-a$ et $\beta-a$. CQFD

Feuille 6 - Exo6 : Même idée que pour $f(x)=\sin(x^2)$ (exo 1) elle n'est donc pas périodique car cela contredirai les résultats de l'exercice 5 (Feuille 6).

Feuille 6 - Exo7 : Si f n'est pas identiquement nulle il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)>0$ (on a déjà utilisé la continuité... où ?)

f étant continue au point c, il existe $\eta > 0$: $|x-c| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < f(c)/2$
soit $f(x) > f(c)/2$ sur $]c-\eta, c+\eta[$: CQFD.
Si f n'est pas continue sur $[a,b]$ ne serait-ce qu'en un point le résultat tombe en défaut : penser à $f(x) = 0$ si $x \in [a,b] \setminus \{c\}$ & $f(c) = 1$

Exercice 8-F6 : • Si f et g sont uniformément continues sur $[a,b]$ elles sont en particulier continues et il en est de même pour $f+g$, fg et $x \mapsto f(x) \sin x$ $[a,b]$ étant fermé-borné elles y sont alors uniformément continues...
• Sur $[a, +\infty[$: fg et $x \mapsto f(x) \sin x$ n'ont pas de raisons d'être tjs UC sur $\mathbb{R}^+$ par exemple si $f(x) = g(x) = x$ (qui est UC sur $\mathbb{R}$...) alors $fg(x) = x^2$ et $f(x) \sin(x)$ sont notoirement non UC sur $[a, \infty[$ CQFD.

Exercice 9_F6