☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices Semaine 6. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. • *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle* $]0,1]$ *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \log(x), \qquad f(x) = cotan(x), \quad f(x) = e^x \cos(1/x).$$

• *Etudier la continuité la continuité uniforme sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = x\sin(x), \quad f(x) = \sin^2(x), \quad f(x) = \sin(x^2), \quad f(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

Exercice 2. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *admettant une limite finie en* $+\infty$ *et* $-\infty$. *Montrer que* f *est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ? Si de plus* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ *montrer que* f *atteint ses bornes.*

Exercice 3. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *admettant une limite finie en* $+\infty$ *et* $-\infty$. *Montrer que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4. *Etudier la continuité la continuité uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f(x) = arctan(x)$ *et de* $f(x) = x\sin(1/x)$ *sur* $[0,+\infty[$.

Exercice 5. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *si* f *est périodique montrer que* f *est uniformément continue, bornée et atteint ses bornes ; montrer aussi que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *il existe* $x_a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_a + a) = f(a)$ *(considérer* $x \mapsto f(x+a) - f(a)$*...).*

Exercice 6. *Montrer que la fonction* $f(x) = \cos(x^2)$ *n'est pas uniformément continue, en déduire qu'elle ne peut être périodique (voir aussi l'exercice 5 de la feuille 1).*

Exercice 7. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$, *si* f *n'est pas identiquement nulle, montrer qu'il existe* $\delta > 0$, $\eta > 0$ *et* $c \in]a,b[$ *tels que* $f(x) > \delta$ *pour tout* $x \in]c-\eta, c+\eta[$. *Montrer que tout ceci tombre en défaut si* f *n'est pas continue.*

Exercice 8. *Soit* f, g *deux fonctions uniformément continues sur* $[a,b]$ *(resp.* $[a,+\infty[$*). Cela implique-t-il la continuité uniforme sur* $[a,b]$ *(resp.* $[a,+\infty[$*) des fonctions* $f+g$, fg, $x \mapsto f(x)\sin(x)$ *?*

Exercice 9. *Soient* $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *; si* f *est bornée montrer que* $f \circ g$ *et* $g \circ f$ *sont bornées.*

Exercice 10. *Montrer que* $f(x) = x + x^2 + 2x^3$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Déterminer un réel* $\alpha > 0$ *tel que* $|f^{(-1)}(y)| \le \alpha|y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

3 octobre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr