I.N.P. **Septembre 2009**

☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices Semaine 5. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *vérifiant* $f(x)^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. *Montrer qu'étant donnés* $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ *il existe* $x_0 \in [a,b]$ *tel que*

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Exercice 3. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *si* f *est périodique de période* $T > 0$, *montrer qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0 + T/2) = f(x_0)$.

Exercice 4. • *Montrer que l'équation* $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]-1, 1[$; *même question pour* $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.
• *Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 5. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue. En considérant la fonction* $g(x) = f(x) - x$, *montrer qu'il existe* $x_0 \in [0,1]$ *tel que* $f(x_0) = x_0$. *Illustrez graphiquement ce résultat.*

Exercice 6. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et injective ; montrer que* f *est soit strictement croissante soit strictement décroissante. En déduire qu'il n'existe pas de fonction* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *vérifiant* $(f \circ f)(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. *On se propose de déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy :* $(\mathscr{E}) \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

0) Montrer que $(\mathscr{E})$ *admet des solutions.*
Soit f *une solution de* $(\mathscr{E})$
1) Montrer que f *est impaire.*
2) Montrer que $f(nx) = nf(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}$.
4) Montrer que $f(rx) = rf(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$.
3) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$ *(vous pouvez utiliser le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).*

ℹ *Pour la culture* $(\mathscr{E})$ *admet aussi des solutions discontinues... mais c'est une autre histoire...*

6 octobre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr