☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices Semaine 4. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *a) Montrer que pour* $a > 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$, *(commencer par* $\alpha = 1$*...).*

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 = \lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log(x)$, $(\alpha > 0)$.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$

Exercice 2. *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x},\ (a > 0),\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x},\ (\alpha \in \mathbb{R}),\quad \lim_{x\to 0_+} x^{\sin(x)}\quad \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{1/x}, \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2(x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x - 1)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x\sin(x)},\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(\tan(x^2)))))}{\tan(x^2)},\quad \lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}$$

Exercice 3. *Démontrer proprement les propriétés vues en cours : soient* $f, g\ :\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ *et* $c \in]a,b[$, *si* f *et* g *sont continues au point* c *alors :*

0) f *est bornée sur un voisinage de* c.
0') Si $f(c) > 0$ *alors pour tous* $0 < \lambda < f(c) < \mu$ *il existera un voisinage* V *de* c *sur lequel* $\lambda < f < \mu$.
1) $f + g$ *est continue au point* c.
2) λf *est continue au poit* c *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $f \cdot g$ *est continue au point* c
4) Si $g(c) \neq 0$ *alors* f/g *est continue au point* c.
5) $|f|$ *est continue au point* c.
6) Soit J *un intervalle contenant* $f(]a,b[)$ *et* $h\ :\ J \to \mathbb{R}$ *une application continue en* $f(c)$, *alors* $g \circ f$ *est continue au point* c.

Exercice 4. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *vérifiant* $f(x) + f(2x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue au point* $x = -1$ *et satisfaisant à l'équation fonctionnelle* $f(2x+1) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. *Le but de cet exercice est de montrer que* f *est constante.*

1) Montrer que $f\left(\frac{t-1}{2}\right) = f(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

2) Soit $t \in \mathbb{R}$, *on définit la suite* $(u_n)_n$ *par :* $u_0 = t,\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$ *pour* $n \geq 1$.

a) Montrer que si la suite $(u_n)_n$ *converge vers* a *alors* $a = -1$.

b) Montrer que la suite $(1 + u_n)_n$ *est une suite géométrique de raison* $1/2$. *Conclusion ?*

c) Montrer par récurrence que $f(t) = f(u_n)$ *pour tout entier* n, *puis que* $f(t) = f(-1)$ *et conclure.*

Exercice 6. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *périodique.*

a) f *est non constante, montrer qu'elle admet une plus petite période strictement positive (i.e. la borne inférieure de toutes les périodes strictement positives de* f *est encore strictement positive et est une période de* f*) : c'est la période fondamentale de* f.

b) Donner l'exemple d'une fonction périodique non constante sans période fondamentale (indic : considérer $f(x) = x\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$*...).*

21 septembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr