☯ ☢ ☯ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices Semaine 3. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Soit* $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ *; montrer que :* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)=2 \implies \lim_{x\to 0} f(x)=1.$

Exercice 2. *Déterminer les limites suivantes ou justifier leur non-existence :*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}\right),\ \lim_{x\to 0} x\cos(x^{-1}),\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin(x))},\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},\ \lim_{x\to\alpha_+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},\ (\alpha\geq 0),\ \lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}.$$

Exercice 3. *Soit* $f :]0,1[\to\mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0.$$

Montrer que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0.$

Exercice 4. *Soient* $f,g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *deux fonctions périodiques vérifiant*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0.$$

Montrer successivement que :

a) f *et* g *ont la même période.*

b) f *et* g *sont égales.*

Exercice 5. *Soit* $f : \mathbb{R}_+^\star\to\mathbb{R}$ *une fonction vérifiant :*

- $\lim_{x\to 0} x(f(x)-1)=0,$
- $f(1)=2,$
- $(x+2)f(x+2)-2(x+1)f(x+1)+xf(x)=0,\ \forall x>0.$

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

10 septembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr